Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 9, Lösungsvorschlag

Aufgabe 3.

(a) Seien A, B und C Mengen. Zeige: Die Zuordnungen

$$f \mapsto \left(\begin{array}{l} A \to C^B \\ a \mapsto \left(\begin{array}{l} B \to C \\ b \mapsto f(a,b) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} A \times B \to C \\ (a,b) \mapsto (g(a))(b) \end{array} \right) \leftarrow\!\shortmid g$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge $C^{A\times B}$ der Abbildungen von $A \times B$ nach C und der Menge $(C^B)^A$ der Abbildungen von A nach C^B, wobei C^B die Menge der Abbildungen von B nach C ist.

(b) Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Zeige: Die Zuordnungen

$$\cdot \mapsto \left(\begin{array}{l} G \to S_M \\ g \mapsto \left(\begin{array}{l} M \to M \\ x \mapsto g \cdot x \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} G \times M \to M \\ (g,x) \mapsto (\varphi(g))(x) \end{array} \right) \leftarrow\!\shortmid \varphi$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge der Wirkungen von G auf M und der Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach S_M, wobei S_M die symmetrische Gruppe auf M ist.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $\Phi\colon C^{A\times B} \to (C^B)^A$ die erste der beiden Abbildungen und $\Psi\colon (C^B)^A \to C^{A\times B}$ die zweite. Wir zeigen, dass diese zueinander invers sind. Für alle $f \in C^{A\times B}$ und $(a,b) \in A \times B$ gilt

$$\Big(\big(\Psi \circ \Phi\big)(f)\Big)(a,b) = \Big(\Psi\big(\Phi(f)\big)\Big)(a,b) = \big((\Phi(f))(a)\big)(b) = f(a,b).$$

Daher gilt $\big(\Psi \circ \Phi\big)(f) = f$ für alle $f \in C^{A\times B}$, das heißt $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{C^{A\times B}}$. Weiter gilt für alle $g \in (C^B)^A$, $a \in A$ und $b \in B$

$$\left(\Big(\big(\Phi \circ \Psi\big)(g)\Big)(a)\right)(b) = \left(\Big(\Phi\big(\Psi(g)\big)\Big)(a)\right)(b) = \big(\Psi(g)\big)(a,b) = (g(a))(b).$$

Daher gilt $\Big(\big(\Phi \circ \Psi\big)(g)\Big)(a) = g(a)$ für alle $g \in (C^B)^A$ und $a \in A$, also $\big(\Phi \circ \Psi\big)(g) = g$ für alle $g \in (C^B)^A$, das heißt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{(C^B)^A}$

(b) Bezeiche W die Menge der Wirkungen von G auf M. Dann ist $W \subseteq M^{G\times M}$ und $\mathrm{Hom}(G, S_M) \subseteq (M^M)^G$ und die gegebenen Abbildungen (sofern sie wohldefiniert sind) sind die jeweiligen Einschränkungen derer aus (a), für den Fall $B = C = M$ und $A = G$. Es reicht also zu zeigen, dass die Abbildungen wohldefiniert sind.

Sei $\cdot \in W$. Zu zeigen ist, dass $\varphi := \Phi(\cdot) \in \mathrm{Hom}(G, S_M)$. Für alle $g, h \in G$ und $m \in M$ gilt

$$(\varphi(1))(m) = 1 \cdot m = m$$

und

$$(\varphi(gh))(m) = (gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m) = \varphi(g)(\varphi(h)(m)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(m).$$

Also $\varphi(1) = \mathrm{id}_M$ und $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Aus diesen beiden Tatsachen folgert man sofort, dass $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, also $\varphi(g) \in S_M$ für alle $g \in G$. Außerdem zeigt dies, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei nun $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, S_M)$. Zu zeigen ist, dass $\cdot := \Psi(\varphi)$ eine Wirkung ist. Seien dazu $g, h \in G$ und $m \in M$. Dann ist

$$1 \cdot m = (\varphi(1))(m) = \mathrm{id}_M(m) = m$$

und

$$(gh) \cdot m = (\varphi(gh))(m) = \big(\varphi(g) \circ \varphi(h)\big)(m) = \varphi(g)((\varphi(h))(m)) = g \cdot (h \cdot m).$$

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, die für jeden Primteiler p von $\#G$ genau eine p-Sylowgruppe besitzt. Zeige:

(a) G ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen. Mit anderen Worten: Sind $H_1, \dots, H_m$ die paarweise verschiedenen Sylowgruppen von G, so ist

$$\begin{aligned} H_1 \times \cdots \times H_m &\to G \\ (h_1, \dots, h_m) &\mapsto h_1 \cdots h_m \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(b) G ist auflösbar.

Hinweis: Benutze 3.2.7(b) und betrachte den Kommutator $[a, b]$ für $a \in H_i$ und $b \in H_j$.

Lösungsvorschlag. (a) Bezeichne φ die obengenannte Abbildung. Sei H_i jeweils eine p_i-Sylowgruppe, d.h. $\#H_i = p_i^{n_i}$ mit $n_i := v_{p_i}(\#G)$. Insbesondere ist $\#G = \prod_{i=1}^m p^{n_i}$.

Nach 3.2.7(b) sind alle H_i Normalteiler von G. Deshalb ist für $a \in H_i$ und $b \in H_j$ für $i \neq j$ der Kommutator

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = (\underbrace{aba^{-1}}_{\in H_j})b^{-1} = a(\underbrace{ba^{-1}b^{-1}}_{\in H_i}) \in H_i \cap H_j.$$

Da $\#(H_i \cap H_j)$ ein Teiler von $p_i^{n_i}$ und von $p_j^{n_j}$ ist, gilt $H_i \cap H_j = \{1\}$ also $[a,b] = 1$. Mit dieser Eigenschaft rechnet man unmittelbar nach, dass φ ein Homomorphismus ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass φ injektiv oder surjektiv ist. Das jeweils Andere folgt dann aus Mächtigkeitsgründen. Wir zeigen aber aus pädagogischen Gründen beides unabhängig voneinander.

Injektivität von φ: Sei also $h = (h_1, \dots, h_m) \in \ker \varphi$. Fixiere $i \in \{1, \dots, m\}$. Setze $\widetilde{H}_{\neq i} := H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \{1\} \times H_{i+1} \times \cdots \times H_m \leq \prod_{i=1}^m H_i$. Wir zeigen, dass H_i und $H_{\neq i} := \varphi(\widetilde{H}_{\neq i})$ teilerfremde Ordnungen und damit, wie oben, trivialen Schnitt haben. Daraus folgt, dass

$$h_i^{-1} = \prod_{j \neq i} h_j \in H_i \cap H_{\neq i} = \{1\},$$

also auch $h_i = 1$. Da i beliebig war ist somit $h = 1$. Nach dem Homomorphissatz ist

$$H_{\neq i} \cong \widetilde{H}_{\neq i} / \ker(\varphi|_{\widetilde{H}_{\neq i}}).$$

Demnach ist $\#H_{\neq i}$ ein Teiler von $\#\widetilde{H}_{\neq i} = \prod_{j \neq i} p_i^{n_i}$, also teilerfremd zu $\#H_i = p_i^{n_i}$.

Bevor wir die Surjektivität von φ zeigen, machen wir noch folgende kleine allgemeine Beobachtung. Ist a ein Element einer beliebigen Gruppe und von endlicher Ordnung n, so ist a ein Produkt von Elementen mit Primpotenzordnung. Dies ist offensichtlich wahr in $\prod_{i=1}^k C_{q_i^{m_i}}$ für $n = \operatorname{ord}(a) = \prod_{i=1}^k q_i^{m_i}$ und $q_i \in \mathbb{P}$ paarweise verschieden. Nach Korollar 2.3.7 des chinesischen Restsatzes ist aber $\prod_{i=1}^k C_{q_i^{m_i}} \cong C_n$, und letzteres isomorph zu $\langle a \rangle$.

Surjektivität von φ: Sei $a \in G$. Wie eben gezeigt, ist a Produkt von Elementen mit Primpotenzordnung, welche allesamt Teiler von $\#G$ sind. Sei also $a = \prod_{i=1}^m a_i$, für gewisse $a_i \in G$ mit $\operatorname{ord}(a_i)$ eine p_i-Potenz. Nach dem Satz von Sylow 3.2.6(a) ist die p_i-Gruppe $\langle a_i \rangle$ Untergruppe der einzigen p_i-Sylowgruppe H_i, also $a_i \in H_i$ für alle i und damit $a \in \operatorname{im} \varphi$. Da $a \in G$ beliebig war, zeigt dies die Surjektivität von φ.

(b) Nach Satz 3.3.10 sind alle H_i als p_i-Gruppen auflösbar. Nun wenden wir iterativ Proposition 3.3.9 an um für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ zu zeigen, dass $H_1 \times \cdots \times H_i$ auflösbar ist, indem wir verwenden, dass H_i und $H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \cong (H_1 \times \cdots \times H_i)/H_i$ auflösbar sind.

Aufgabe 5. Seien $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p < q$ und sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeige:

(a) G ist auflösbar.

(b) Ist p kein Teiler von $q - 1$, so ist G zyklisch.

(c) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung 15.

Hinweis: Benutze 2.8.7, 3.2.6, 3.2.7(b) und Aufgabe 4.

Lösungsvorschlag. (a) Zunächst zeigen wir, dass es genau eine q-Sylowgruppe von G gibt. Nach Bemerkung 3.2.7(c) ist die Anzahl der q-Sylowgruppen n_q ein Teiler von p, es ist also $n_q \in \{1, p\}$. Da aber nach der gleichen Bemerkung q ein Teiler von $n_q - 1$ ist, kann n_p wegen $p < q$ nicht p sein, also $n_q = 1$. Sei also Q die einzige q-Sylowgruppe. Diese ist nach 3.2.7(b) Normalteiler von G.

Nun haben die Gruppen Q und G/Q Primzahlordnung q bzw. p und sind damit abelsch (sogar zyklisch), insbesondere auflösbar. Proposition 3.3.9 liefert damit die Auflösbarkeit von G.

(b) Sei p kein Teiler von $q - 1$. Wie in (a) gezeigt, gibt es genau eine q-Sylowgruppe Q von G und diese ist ein Normalteiler. Mit der gleichen Argumentation sehen wir unter Verwendung von $p \nmid q - 1$, dass es genau eine p-Sylowgruppe P von G gibt und diese ist ebenfalls ein Normalteiler. Nach Aufgabe 4 oder 1.4.8 gilt nun $G \cong P \times Q$. Da $\#P = p$ prim ist, ist $P \cong C_p$ und analog ist $Q \cong C_q$. Also $G \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$ nach 2.8.7, also G zyklisch.

(c) Ist G eine Gruppe der Ordnung 15, so folgt mit $p = 3$ und $q = 5$ sofort aus (b), dass $G \cong C_{15}$ ist.