
Übungsblatt 11 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei $K|\mathbb{R}$ eine Körpererweiterung mit $[K : \mathbb{R}] = 2$. Zeige $K \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung derart, dass jedes Polynom aus $K[X] \setminus \{0\}$ in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass L algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0, 1\} \subseteq M$ und $K := \mathbb{Q}(M \cup M^*)$, wobei

$$M^* := \{z^* \mid z \in M\}$$

das Bild von M unter der komplexen Konjugation $z \mapsto z^*$ ist. Zeige:

(a) Der Körper $\star M$ ist *quadratisch abgeschlossen*, das heißt für $a \in \star M$ ist $\sqrt{a} \in \star M$.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $a > 0$ und benutze dort den Höhensatz.

(b) Ist $a \in M'$, also durch einen der elementaren Konstruktionsschritte (\times) , (\varnothing) oder (\odot) aus M konstruierbar, so ist $[K(a) : K] \leq 2$.

Hinweis: Nehme bei (\odot) zunächst an, dass die beiden Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen und führe es dann auf (\varnothing) zurück.

Abgabe bis Montag, den 26. Januar, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.