
Einführung in die Algebra, Übungsblatt 11, Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0, 1\} \subseteq M$ und $K := \mathbb{Q}(M \cup M^*)$, wobei

$$M^* := \{z^* \mid z \in M\}$$

das Bild von M unter der komplexen Konjugation $z \mapsto z^*$ ist. Zeige:

- (a) Der Körper $\star M$ ist *quadratisch abgeschlossen*, das heißt für $a \in \star M$ ist $\sqrt{a} \in \star M$.
- (b) Ist $a \in M'$, also durch einen der elementaren Konstruktionsschritte (\times) , (\varnothing) oder (\odot) aus M konstruierbar, so ist $[K(a) : K] \leq 2$.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $a \in \star M$. Zunächst betrachten wir den Fall, dass $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\star M$ nach Aufgabe 3 auf Blatt 10 ein Oberkörper von $\mathbb{Q}(i)$ ist, können wir auch $\frac{a-1}{2} \in \mathbb{R}$ und i konstruieren. Es gilt

$$\left| i\sqrt{a} - \frac{a-1}{2} \right|^2 = (\sqrt{a})^2 + \left(\frac{a-1}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+1}{2} \right)^2.$$

Also ist $i\sqrt{a}$ ein Schnittpunkt der imaginären Achse und dem Kreis um $\frac{a-1}{2}$ mit Radius $\frac{a+1}{2}$, ist also konstruierbar. Somit ist auch $\sqrt{a} \in \star M$. Die Anschauung dahinter besteht darin, dass wir mit dem Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck mit den Ecken -1 , a und ih bekommen, welches über der auf der reellen Achse liegenden Seite die Höhe $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat. Die Höhe h teilt damit die Hypotenuse in Abschnitte der Länge 1 und a und nach dem Höhensatz des Euklid gilt also $h^2 = 1 \cdot a$.

Für den allgemeinen Fall $0 \neq a \in \star M$ schneiden wir zunächst den Kreis um 0, der durch a geht, mit der reellen Achse, um $|a|$ zu konstruieren. Daraus konstruieren wir wie eben beschrieben $\sqrt{|a|}$. Schließlich schneiden wir den Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{|a|}$ mit der leicht zu konstruierenden Winkelhalbierenden zwischen der reellen Achse und der Geraden $\mathbb{R}a$. Die beiden Schnittpunkte sind dann die Quadratwurzeln von a .

(b) Zunächst beobachten wir, dass $K^* = K$ gilt. Hieraus folgt, dass für $x \in K$ auch der Realteil $\operatorname{Re} x := \frac{1}{2}(x + x^*)$ und i mal der Imaginärteil $i \operatorname{Im} x := \frac{1}{2}(x - x^*)$ beide in K liegen. Sei nun $a \in M'$.

Fall 1: a ist durch (\times) (Schnitt zweier Geraden) aus M konstruiert worden. Dann gibt es $x, y, v, w \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $a = \lambda(x - y) + y = \mu(v - w) + w$ derart, dass $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung $\lambda(x - y) + y = \mu(v - w) + w$ *eindeutig* bestimmt sind.

Es sind also λ und μ die einzigen reellen Zahlen, die das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten aus K lösen:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re}(x - y))\lambda + (\operatorname{Re}(w - v))\mu &= \operatorname{Re}(y - w) \\(i \operatorname{Im}(x - y))\lambda + (i \operatorname{Im}(w - v))\mu &= i \operatorname{Im}(y - w)\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit können natürlich nicht alle Koeffizienten der zweiten Gleichung dieses Systems verschwinden, weshalb wir die zweite Gleichung durch eine ihrer (rein imaginären) Koeffizienten teilen können, sodass ein Gleichungssystem in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit Koeffizienten im Körper $K \cap \mathbb{R}$ entsteht. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, müssen somit die eindeutigen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die das Gleichungssystem lösen, wieder in $K \cap \mathbb{R}$ und somit insbesondere in K liegen. Wir bekommen also $\lambda, \mu \in K$, und somit auch $a \in K$. Das bedeutet $[K(a) : K] = 1$.

Fall 2: a ist durch (\emptyset) (Schnitt einer Geraden mit einem Kreis) aus M konstruiert worden. Dann gibt es $x, y, z, s, t \in M$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$|a - z|^2 = |s - t|^2 \quad (\text{I})$$

$$a = \lambda(x - y) + y \quad (\text{II})$$

setze $r := s - t \in K$. Wir schreiben (I) um und konjugieren (II) und bekommen

$$a^*a - a^*z - az^* + z^*z = r^*r \quad (\text{I})$$

$$a^* = \lambda(x^* - y^*) + y^* \quad (\text{II}^*)$$

Setzen wir nun (II) und (II^{*}) in (I) ein, so bekommen wir eine quadratische Gleichung in λ mit Koeffizienten in K . Beachte, dass diese Gleichung wirklich vom Grad 2 ist, da der quadratische Koeffizient $(x^* - y^*)(x - y) \neq 0$ ist. Somit ist $[K(\lambda) : K] \leq 2$ und wegen $a \in K(\lambda)$ auch $[K(a) : K] \leq 2$.

Fall 3: a ist durch (\odot) (Schnitt zweier Kreise) aus M konstruiert worden. Wie eben gibt es also $y, z, r, s \in K$ mit

$$a^*a - a^*z - az^* + z^*z = r^*r \quad (\text{I})$$

$$a^*a - a^*y - ay^* + y^*y = s^*s, \quad (\text{II})$$

wobei die Mittelpunkte y und z der Kreise verschieden sind. Ziehen wir (II) von (I) ab, so bekommen wir

$$a^*(y - z) - a(z^* - y^*) + z^*z - y^*y = r^*r - s^*s \quad (\text{I-II})$$

Wegen $y \neq z$ können wir (I-II) also nach a^* auflösen und in (I) einsetzen und bekommen dann eine quadratische Gleichung in a mit Koeffizienten in K . Auch diese Gleichung hat nicht verschwindenden quadratischen Koeffizienten $\frac{z^* - y^*}{y - z}$. Es folgt wieder $[K(a) : K] \leq 2$.