§5.3 Der Fundamentalsatz der Algebra

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.
Œ $f = X^2 + bX + x$ mit $b, c \in \mathbb{C}$.

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.
Œ $f = X^2 + bX + x$ mit $b, c \in \mathbb{C}$. Wegen $f = (X + \frac{b}{2})^2 + (c - \frac{b^2}{4})$ reicht es zu zeigen, dass jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel besitzt.

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.
Œ $f = X^2 + bX + x$ mit $b, c \in \mathbb{C}$. Wegen $f = (X + \frac{b}{2})^2 + (c - \frac{b^2}{4})$ reicht es zu zeigen, dass jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Dies folgt zum Beispiel mit der Polarzerlegung einer komplexen Zahl aus der Analysis: Sind $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so $(\sqrt{r}e^{\mathring{\imath}\frac{\varphi}{2}})^2 = re^{\mathring{\imath}\varphi}$.

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.
Œ $f = X^2 + bX + x$ mit $b, c \in \mathbb{C}$. Wegen $f = (X + \frac{b}{2})^2 + (c - \frac{b^2}{4})$ reicht es zu zeigen, dass jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Dies folgt zum Beispiel mit der Polarzerlegung einer komplexen Zahl aus der Analysis: Sind $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so $(\sqrt{r}e^{\mathring{\imath}\frac{\varphi}{2}})^2 = re^{\mathring{\imath}\varphi}$.
Alternativ: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $r := \sqrt{a^2 + b^2}$, so

$$\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm \mathring{\imath}\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right)^2 = \frac{r+a}{2} \pm 2\mathring{\imath}\sqrt{\frac{r^2-a^2}{4}} - \frac{r-a}{2} = a \pm 2\mathring{\imath}\left|\frac{b}{2}\right|.$$

$\square$

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Lemma. Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis.
Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad und Œ normiert. Dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, insbesondere nimmt die stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ positive und negative Werte an.
Benutze nun den Zwischenwertsatz aus der Analysis. $\square$

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\operatorname{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \operatorname{Aut}(L|\mathbb{R})$.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{R})$. Nach Galois ist $[L^P : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade, woraus mit dem zweiten Lemma folgt $L^P = \mathbb{R}$.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{R})$. Nach Galois ist $[L^P : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade, woraus mit dem zweiten Lemma folgt $L^P = \mathbb{R}$. Dann ist $G = P$ eine 2-Gruppe.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{R})$. Nach Galois ist $[L^P : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade, woraus mit dem zweiten Lemma folgt $L^P = \mathbb{R}$. Dann ist $G = P$ eine 2-Gruppe. Als Untergruppe von G ist nach Lagrange daher auch die Galoisgruppe $H := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{C})$ der Galoiserweiterung $L|\mathbb{C}$ eine 2-Gruppe.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\operatorname{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \operatorname{Aut}(L|\mathbb{R})$. Nach Galois ist $[L^P : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade, woraus mit dem zweiten Lemma folgt $L^P = \mathbb{R}$. Dann ist $G = P$ eine 2-Gruppe. Als Untergruppe von G ist nach Lagrange daher auch die Galoisgruppe $H := \operatorname{Aut}(L|\mathbb{C})$ der Galoiserweiterung $L|\mathbb{C}$ eine 2-Gruppe. Wäre $H \neq \{1\}$, so gäbe es ein $I \lhd H$ mit $[H : I] = 2$, woraus $[L^I : \mathbb{C}] = [L^I : L^H] \overset{\text{Galois}}{=} [H : I] = 2$ folgte im Widerspruch zum ersten Lemma.

Fundamentalsatz der Algebra [Jean-Robert Argand *1768 †1822].
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis.
Sei $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Zu zeigen: $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Zwischenkörper L von $\overline{\mathbb{C}}|\mathbb{C}$ mit $z \in L$ derart, dass $L|\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung ist (zum Beispiel den Zerfällungskörper von $(X^2+1)\,\mathrm{irr}_{\mathbb{R}}(z)$ über $\mathbb{R}$).
Wir zeigen $L = \mathbb{C}$. Wähle eine 2-Sylowgruppe P der Galoisgruppe $G := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{R})$. Nach Galois ist $[L^P : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade, woraus mit dem zweiten Lemma folgt $L^P = \mathbb{R}$. Dann ist $G = P$ eine 2-Gruppe. Als Untergruppe von G ist nach Lagrange daher auch die Galoisgruppe $H := \mathrm{Aut}(L|\mathbb{C})$ der Galoiserweiterung $L|\mathbb{C}$ eine 2-Gruppe. Wäre $H \neq \{1\}$, so gäbe es ein $I \lhd H$ mit $[H : I] = 2$, woraus $[L^I : \mathbb{C}] = [L^I : L^H] \overset{\text{Galois}}{=} [H : I] = 2$ folgte im Widerspruch zum ersten Lemma. Also folgt $H = \{1\}$ und daher $L = L^H \overset{\text{Galois}}{=} \mathbb{C}$. $\square$