Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (4P) (Parametrisierungen)

Beschreibe in einfachen Worten den $\mathbb{Q}$-Zariskiabschluss in $\mathbb{R}^2$ der Menge aller Punkte

$$\left(\frac{u^{10}+2u^6+14u^5+u^2+14u+49}{u^{10}+14u^5+u^2+49}, \frac{2u^{11}-2u^{10}+28u^6-28u^5+4u^3-4u^2+98u-98}{u^{11}-u^{10}+14u^6-14u^5+u^3-u^2+49u-49}\right)$$

mit $u \in \mathbb{R}$, für die die beiden Nenner nicht verschwinden.

Aufgabe 2. (6P) (endliche Varietäten)

Sei $I = (X^2+Y+Z-1, X+Y^2+Z-1, X+Y+Z^2-1) \subseteq \mathbb{Q}[X,Y,Z]$ und betrachte $V := V(I) \subseteq \mathbb{C}^3$.

(a) Gebe ein sehr kurzes Argument dafür, dass V endlich ist.

(b) Gebe ein einfaches Argument dafür, dass $\#V \leq 6$.

(c) Berechne unter Verwendung des `SINGULAR`-Befehls `groebner` (der Befehl `eliminate` darf nicht benutzt werden) ein Polynom, welches das Eliminationsideal $I \cap \mathbb{Q}[Z]$ erzeugt.

(d) Bestimme ein Erzeugendensystem des Radikalideals von I.

(e) Benutze den `SINGULAR`-Befehl `groebner`, um $\#V$ zu bestimmen, ohne die Elemente von V zu berechnen.

(f) Bestimme alle Elemente von V.

Aufgabe 3. (8P) (Kochen-Specker-Paradox)

Wir nennen eine auf einer Menge $U \subseteq S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ definierte Funktion $f\colon U \to \{0,1\}$ eine *Spinfunktion*, falls f folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) Für alle paarweise orthogonalen $u_1, u_2, u_3 \in U$ gilt: Es gibt genau ein $i \in \{1,2,3\}$ mit $f(u_i) = 0$.

(b) Für alle paarweise orthogonalen $u_1, u_2 \in U$ gilt: Es gibt ein $i \in \{1,2\}$ mit $f(u_i) = 1$.

Zeige mit Hilfe von Gröbnerbasen und SINGULAR, dass es keine Spinfunktion auf S^2 gibt, indem du eine endliche Menge $U \subseteq S^2$ findest, auf der es keine Spinfunktion gibt. Du kannst für U zum Beispiel die sogenannte Peres-Konfiguration nehmen:

$$\Bigg\{ (1,1,0),\ (1,-1,0),\ (1,0,1),\ (1,0,-1),\ (0,1,1),\ (0,1,-1),\ \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(1,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (1,0,0),\ \left(1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1,0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(0,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0),\ \left(0,1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1,0\right),$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,1\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),$$
$$(0,0,1),\ \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,1\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\Bigg\}.$$

Zum physikalischen Hintergrund: Diese Aufgabe beweist einen sehr bekannten Satz aus der Quantenmechanik über verborgene Variablen aus dem Jahre 1968. Der Originalbeweis ist elementar aber unübersichtlich und verwendet rein geometrische Überlegungen.

Die oben definierte Spinfunktion simuliert die Messung des Spins eines Spin-1-Teilchens. Wählt man drei orthogonale Richtungen u_1, u_2, u_3 und misst man nacheinander den Spin dieses Teilchens, erhält man als Ergebnis genau zweimal 1 und einmal 0. Danach kann man in beliebiger Reihenfolge nochmal messen und das Ergebnis bleibt dasselbe. Messungen, die den letzten Satz wahr machen, heißen kompatibel.

Die Heisenbergsche Unschärferelation drückt aus, dass nicht alle Messungen kompatibel sein müssen. Messen wir zum Beispiel den Spin in Richtung $(1,0,0)$, danach den Spin in Richtung $(1,1,0)$ und schließlich wieder in Richtung $(1,0,0)$, so müssen das erste und dritte Ergebnis nicht übereinstimmen. Eine Messung kann also den Zustand des Gesamtsystems verändern.

Die gängige Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik erklärt das folgendermaßen: Wird der Spin in Richtung $(1,1,0)$ gemessen, so hat der Spin in $(1,0,0)$ keinen definiten Wert mehr. Vielmehr ist er eine Superposition von möglichen Werten. Das bedeutet, dass er zu einem gewissen Prozentsatz der Wert 1 ist und zu einem gewissen Prozentsatz 0. Misst man nun wieder in Richtung $(1,0,0)$, so kollabiert diese Wahrscheinlichkeitsfunktion und es wird wieder ein fester Wert angenommen (wobei die Wahrscheinlichkeit von Wert 1 in der Superposition angibt, wie wahrscheinlich es jetzt ist, dass 1 dieser feste Wert wird).

Ausgehend von einer klassischen Sichtweise der Physik könnte man nun geneigt sein zu argumentieren, diese Sichtweise anzuzweifeln und zu argumentieren, dass der Spin jederzeit in jeder Richtung definiert ist und der Mensch nur nicht genug Informationen (die in sogenannten verborgenen Variablen steckt) besitzt, um die zufällig wirkenden Ergebnisse von nichtkompatiblen Messungen vorherzusagen. Wir sagen, dass eine Sichtweise der Quantenmechanik die Wertdefinitheit (WD) erfüllt, wenn jede physikalische Eigenschaft unabhängig davon existiert, ob gerade eine Messung durchgeführt wird und einen festen Wert in $\mathbb{R}$ besitzt.

Wir sagen, dass eine Sichtweise der Quantenmechanik nichtkontextuell (NK) ist, wenn kompatible Messungen den wahren Wert ihrer zugehörigen Eigenschaft ergeben, falls dieser existiert. Beachte bei dieser Sichtweise, dass eine Messung sehr wohl den Gesamtzustand des Systems verändern kann, da sie die physikalischen Eigenschaften, welche inkompatibel zu den gemessenen sind, sehr wohl ändern kann.

Eine Sichtweise der Quantenmechanik, die zugleich (WD) sowie (NK) erfüllt, ist insofern erstrebenswert, weil man die klassische Sicht, dass physikalische Eigenschaften zu jeder Zeit einen festen Wert haben und objektiv messbar sind, nicht aufgeben müsste. Der Satz von Kochen-Specker besagt, dass (WD) und (NK) inkonsistent sind.

Beweis: Wir betrachten ein Spin-1-Teilchen. Wegen (WD) können wir den Gesamtzustand vor der ersten Messung als Funktion $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ auffassen. (NK) bedeutet gerade, dass f eine Spinfunktion ist. Der Rest folgt mit der Aufgabe.

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Januar 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.