Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (6P) (Eine rationale Parametrisierung der Sphäre)

Betrachte die Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$. Betrachte $\mathbb{A}^3 = \mathbb{C}^3$ mit der $\mathbb{R}$-Zariskitopologie und statte die Teilmenge $\mathbb{R}^3$ gemäß 1.4.5 mit deren Spurtopologie aus.

(a) Zeige, dass es kein $n \in \mathbb{N}$ und Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt derart, dass S^2 der Abschluss des Bildes von $\psi : \mathbb{R}^n \to S^2, x \mapsto (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ ist.

(b) Bestimme das Bild von

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2,\ (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

und zeige, dass sein Abschluss in $\mathbb{R}^3$ gleich S^2 ist.

Aufgabe 2. (4P) (Bestimmen eines Zariskiabschlusses)

Die Sphäre S^2 sei wieder mit der Topologie aus Aufgabe 1 ausgestattet. Zeige, dass der Abschluss des Bildes von

$$\varphi\colon S^2 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

gleich $V(X_1^2X_2^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^2X_3^2 - X_1X_2X_3) \cap \mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 3. (6P) (Ein Resultat über lineare Algebra)

Seien $c_1, ..., c_6 \in \mathbb{C}^\times$ derart, dass für unendlich viele $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x & c_1 & c_2 \\ 0 & x & c_1 & c_2 & c_3 \\ x & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

nicht invertierbar ist. Zeige, dass die letzten beiden Spalten dieser Matrix linear abhängig sind. Du darfst dabei den `SINGULAR`-Befehl zum Berechnen von Radikalidealen verwenden:

```
LIB "primdec.lib"; ideal I = radical(J);
```

Kann man auch ohne diesen Befehl auskommen?

Abgabe bis Mittwoch, den 20. Januar 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.