Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (3P) (Isomorphie endlicher Varietäten)

Schreibe die Polynome $f := X_1^2X_2X_3^3 - 2X_1X_2^2X_3 + 3X_2X_3 + 1$, $g := 5X_1^2X_2X_3^3 + 2X_1X_2^2X_3 - 3X_2X_3 + 3$ und $h := X_1^2X_2X_3^3 + 2X_1X_2^2X_3 - X_2$ aus $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ bezüglich

(a) der lexikographischen Ordnung,

(b) der gradlexikographischen Ordnung und

(c) der gradrückwärtslexikographischen Ordnung

jeweils so, dass größere Monome weiter links und kleinere Monome weiter rechts stehen. Bestimme jeweils Leitmonom, Leitkoeffizient und Leitterm.

Aufgabe 2. (4P) (Isomorphie von Varietäten)

Zeige:

(a) Zwei isomorphe affine K-Varietäten haben jeweils gleich viele irreduzible Komponenten.

(b) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{A}^2$

(c) Seien V_1 und V_2 affine K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^m$ und W_1 und W_2 affine K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^n$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $V_1 \cong W_1$ und $V_2 \cong W_2$. Dann gilt $V_1 \cup V_2 \cong W_1 \cup W_2$.

Aufgabe 3. (3P) (Bijektive Morphismen und Isomorphismen)

Beweise oder widerlege: Ist $K = C$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sind V und W affine K-Varietäten, für die es von V nach W und von W nach V jeweils einen bijektiven Morphismus gibt, so $V \cong W$.

Aufgabe 4. (6P) (Morphismen und Koordinatenringe)

Sei $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus affiner K-Varietäten und $\varphi^*\colon K[W] \to K[V]$ der dazu duale K-Algebrenhomomorphismus. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

(a) φ injektiv $\implies$ φ^* surjektiv

(b) φ surjektiv $\implies$ φ^* injektiv

(c) φ^* injektiv $\implies$ φ surjektiv

(d) φ^* surjektiv $\implies$ φ injektiv

Abgabe bis Mittwoch, den 2. Dezember 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.