Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (2P) (Leitideale von Idealen)

Seien $I \subseteq K[\overline{X}]$ ein Ideal und $\leq_1, \leq_2$ zwei Monomordnungen auf $[\underline{X}]$. Zeige:

$$L_{\leq_1}(I) \subseteq L_{\leq_2}(I) \implies L_{\leq_1}(I) = L_{\leq_2}(I)$$

Aufgabe 2. (8P) (Existenz von vollendeten Gröbnerbasen)

Sei $I \subseteq K[\overline{X}]$ ein Ideal. Zeige, dass I eine *vollendete Gröbnerbasis* besitzt, das heißt es gibt ein Erzeugendensystem G von I, das bezüglich jeder Monomordnung auf $[\underline{X}]$ eine Gröbnerbasis ist.

Hinweis: Zeige, dass die Menge aller Leitideale $\{L_{\leq}(I) \mid \leq \text{ Monomordnung auf } [\underline{X}]\}$ von I endlich ist. Setze zu einem Widerspruchsbeweis an und konstruiere hierzu eine Folge von Monomen $m_1, m_2, \ldots$, die folgendes erfüllen:

- Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele verschiedene Leitideale von I, die $m_1, \ldots, m_k$ enthalten.
- Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Inklusion $(m_1, \ldots, m_{k-1}) \subset (m_1, \ldots, m_k)$ echt.

Benutze nun das Dickson-Lemma, um einen Widerspruch zu erhalten (5P).
Konstruiere von dieser Tatsache ausgehend eine vollendete Gröbnerbasis von I (3P).

Aufgabe 3. (6P) (Ein praktisches Beispiel einer vollendeten Gröbnerbasis)

Betrachte den Polynomring

$$A := \mathbb{R}[X_{ij} \mid i \in \{1, 2\}, j \in \{1, \ldots, n\}]$$

über $\mathbb{R}$ in $2n$ Variablen und darüber die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & \ldots & X_{2n} \end{pmatrix} \in A^{2\times n}.$$

Zeige, dass die 2×2-Unterminoren $D_{ij} := X_{1i}X_{2j} - X_{1j}X_{2i}$ mit $1 \leq i < j \leq n$ dieser Matrix eine vollendete Gröbnerbasis bilden.

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall $n = 3$ und folgere daraus den allgemeinen Fall. Benutze 2.6.12, um weniger rechnen zu müssen.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Januar 2015, 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.