

---

Übungsblatt 8 zur Zahlentheorie

---

**Aufgabe 1. (3P)** (Eine praktische Aufgabe zur ganzen Abgeschlossenheit)

Überprüfe, ob die folgenden Ringe ganz abgeschlossen sind:

- (a)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- (b)  $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}, \frac{1}{13}]$
- (c)  $\mathbb{Z}[X, Y]$

**Aufgabe 2. (3P)** (Abdividieren von Nullstellen)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring.

- (a) Seien  $f, g \in R[X]$  und sei  $g$  normiert. Zeige, dass es dann  $q, r \in R[X]$  gibt mit  $f = qg + r$  und  $\deg(r) < \deg(g)$  (mit der üblichen Konvention  $\deg 0 := -\infty$ ).
- (b) Sei  $f \in R[X]$  und  $a \in R$  mit  $f(a) = 0$ . Zeige, dass es  $q \in R[X]$  gibt mit  $f = (X - a)q$ .
- (c) Kann es ein Polynom aus  $R[X]$  vom Grad  $d \in \mathbb{N}_0$  mit mehr als  $d$  verschiedenen Nullstellen in  $R$  geben?

**Aufgabe 3. (16P)** (Lässt sich das Konzept des algebraischen Abschlusses von Körpern auf Ringe übertragen?)

Sei  $A$  ein kommutativer Ring. Wir nennen einen kommutativen Oberring  $B \supseteq A$  eine (ganze) Aufblähung von  $A$ , wenn  $B$  über  $A$  ganz ist und jedes normierte Polynom  $f \in B[X] \setminus B$  eine Nullstelle in  $B$  hat. Falls du in der folgenden Aufgabe nicht weiter kommst, schau in Deiner Algebra-Mitschrift nach wie analoge Aussagen für Körper bewiesen wurden (etwa bei (a) bis (d)). Sehr viele Teilaufgaben lassen sich lösen ohne ihre Vorgänger gelöst zu haben (bzw. indem man einfach die vorherigen Aussagen ohne Beweis verwendet).

- (a) Sei  $f \in A[X] \setminus A$  normiert. Zeige, dass es dann einen kommutativen Oberring  $B$  von  $A$  gibt, der ganz über  $A$  ist, in dem  $f$  eine Nullstelle  $x$  mit  $B = R[x]$  besitzt.
- (b) Setze  $I := \{f \in A[X] \setminus A \mid f \text{ normiert}\}$ . Zeige, dass  $A$  sich kanonisch einbettet in den Ring

$$A_1 := A[X_f \mid f \in I] / (f(X_f) \mid f \in I).$$

- (c) Begründe, warum es einen Oberring von  $A$  gibt, der ganz über  $A$  ist und in dem jedes normierte Polynom aus  $A[X] \setminus A$  eine Nullstelle hat.
- (d) Zeige, dass  $A$  eine Aufblähung besitzt.
- (e) Finde ein  $A$  und ein Polynom aus  $A[X] \setminus A$ , welches in keinem kommutativen Oberring von  $A$  eine Nullstelle besitzt.
- (f) Finde zwei zueinander nicht isomorphe Aufblähungen von  $\mathbb{Z}$ .
- (g) Überlege dir, warum Deine Konstruktion aus (a) nicht auch für nicht normierte Polynome funktioniert.
- (h) Was ist an folgendem „Beweis“ von (d) falsch?

1 Betrachte die durch die Unterringbeziehung halbgeordnete Menge

$$M := \{B \mid B \text{ Oberring von } A, B \text{ ganz über } A\}.$$

2 Jede Kette in  $M$  besitzt in  $M$  eine obere Schranke: Die leere Kette besitzt den  
 3 Ring  $A$  als obere Schranke. Aus einer nichtleeren Kette  $K \subseteq M$  kann man leicht  
 4 einen kommutativen Ring konstruieren, der ein Oberring jedes Elements von  $K$  ist,  
 5 indem man als Trägermenge die Vereinigung der Trägermengen der Elemente von  
 6  $K$  nimmt. Der so konstruierte Ring ist dann eine obere Schranke von  $K$  in  $M$ . Somit  
 7 sind die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt und wir können schließen,  
 8 dass  $M$  ein maximales Element  $B$  besitzt. Aus (a) folgt nun mit der Maximalität  
 9 von  $B$ , dass  $B$  eine Aufblähung von  $R$  ist.

- (i) Sei  $A$  ein Integritätsring,  $K := \text{qf}(A)$  und  $L$  ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von  $K$ . Zeige, dass der ganze Abschluss von  $A$  in  $L$  eine Aufblähung von  $A$  ist.
- (j) Sei  $B$  eine Aufblähung von  $A$ , die ein Integritätsring ist. Dann ist der Quotientenkörper  $L$  von  $B$  ein algebraischer Abschluss des Quotientenkörpers  $K$  von  $A$  und  $B$  der ganze Abschluss von  $A$  in  $L$ .
- (k) Sei  $A$  ein Integritätsring. Zeige, dass es unter den Integritätsringen eine bis auf  $A$ -Isomorphie eindeutige Aufblähung von  $A$  gibt. (Dabei ist ein  $A$ -Homomorphismus ein Ringhomomorphismus, der gleichzeitig  $A$ -Modulhomomorphismus ist, woraus sich die Begriffe  $A$ -Isomorphismus und  $A$ -Einbettung ergeben.)

**Abgabe** bis Dienstag, den 9. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.