Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Lokalisierung und Quotienten von Dedekindringen)

Sei A ein Dedekindring.

(a) Sei $S \subseteq A \setminus \{0\}$ multiplikativ. Zeige, dass dann auch $S^{-1}A$ ein Dedekindring ist.

(b) Für welche Ideale I von A ist A/I ein Dedekindring?

Aufgabe 2. (5P) (Dedekindringe und absteigende Idealketten)

Sei R ein Dedekindring.

(a) Zeige, dass R ein Körper ist oder als R-Modul nicht artinsch ist.

(b) Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine echt absteigende Folge von Idealen in R (das heißt $I_1 \supset I_2 \supset \dots$). Zeige

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = (0).$$

Aufgabe 3. (4P) (Dedekindringe mit nur endlich vielen Primidealen)

Sei R ein Dedekindring, der nur endlich viele Primideale besitzt. Zeige, dass dann R schon ein Hauptidealring ist.

Hinweis: Seien $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ die verschiedenen Primideale $\neq 0$ von R. Finde mit dem Chinesischen Restsatz für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ ein

$$x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_i^2 \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n).$$

Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte) (Ganzheit und Norm)

Sei A ein ganz abgeschlossener Integritätsring und $K = \mathrm{qf}(A)$. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung und $x \in L$ ganz über A. Zeige:

(a) $N_{L|K}(x) \in A$, $\mathrm{tr}_{L|K}(x) \in A$

(b) x teilt $N_{L|K}(x)$ in $A[x]$.

Abgabe bis Dienstag, den 23. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.