series Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
series Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
series Sommersemester 2015

Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Vandermonde-Matrix)

Sei A ein kommutativer Ring. Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, ..., a_n \in A$ die Matrix

$$V(a_1, ..., a_n) := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in A^{n \times n}.$$

und ihre Determinante $v(a_1, ..., a_n) := \det V(a_1, ..., a_n) \in A$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $A := \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ und $B := \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Zeige, dass $v(X_1, ..., X_n) \in A = B[X_n]$ aufgefasst als Polynom in X_n vom Grad $n-1$ ist, im Quotientenkörper von A genau die Nullstellen $X_1, \ldots, X_{n-1}$ hat und als Leitkoeffizienten $v(X_1, ..., X_{n-1})$ hat.

(b) Zeige $v(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$ in $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mittels (a) durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Zeige $v(a_1, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Aufgabe 2. (6P) (Ringe mit genau einem maximalen Ideal)

Sei A ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A ist lokal [$\rightarrow$1.5.8(b)].

(b) $A \setminus A^\times$ ist ein Ideal von A.

(c) A besitzt genau ein maximales Ideal.

(d) $0 \neq 1$ in A und $\forall x \in A : (x \in A^\times \text{ oder } 1 - x \in A^\times)$

Aufgabe 3. (4P) (Beispiele für lokale Ringe)

(a) Sei A ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeige, dass dann die Lokalisierung von A nach $\mathfrak{p}$

$$A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} A$$

ein lokaler Ring ist.

(b) Sei $A := C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass $I := \{f \in A \mid \text{es gibt eine Nullumgebung } U \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } f|_U = 0\}$ ein Ideal von A ist. Zeige, dass A/I ein lokaler Ring ist. Ist es ein Integritätsring? Ist es ein Körper?

Abgabe bis Dienstag, den 30. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.