**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2015**

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer
Franz & Sepp

# Übungsblatt 13 zur Zahlentheorie

**Aufgabe 1. (6P)** (Gitter von einigen Zahlringen des Grades 3)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $f := X^3 + aX + b$ ein in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibles Polynom, $x \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = 0$ und $\mathscr{O}$ der Zahlring von $\mathbb{Q}(x)$. Setze $M := \mathbb{Z}[x]$.

(a) Zeige, dass $M$ ein multiplikatives Gitter des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(x)$ ist.

(b) Zeige $\mathrm{d}(M) = -4a^3 - 27b^2$.

(c) Finde $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass $f$ irreduzibel und $M = \mathscr{O}$.

**Aufgabe 2. (2P)** (Einheitswurzeln)

Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen $\zeta \in K$ eine *$n$-te Einheitswurzel* in $K$ wenn $\zeta^n = 1$. Wir nennen ein solches $\zeta$ eine *primitive $n$-te Einheitswurzel*, wenn es die Ordnung $n$ in der Gruppe $K^\times$ hat. Zeige, dass die Menge der $n$-ten Einheitswurzeln von $K$ eine endliche zyklische Untergruppe von $K^\times$ ist.

**Aufgabe 3. (4P)** (Existenz von primitiven $n$-ten Einheitswurzeln)

Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $p$ die Charakteristik von $K$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $K$ besitzt eine primitive $n$-te Einheitswurzel.

(b) $K$ besitzt $n$ verschiedene $n$-te Einheitswurzeln.

(c) $p \nmid n$ und $X^n - 1$ zerfällt in $K[X]$.

**Aufgabe 4. (4P)** (Ein Kandidat für das Minimalpolynom einer primitiven $n$-ten Einheitswurzel)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere mit der Notation von Aufgabe 2

$$\Phi_n = \prod_{\zeta \text{ primitive } n\text{-te Einheitswurzel in } \mathbb{C}} (X - \zeta) \subseteq \mathbb{C}[X]$$

(a) Zeige $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe von Galoistheorie.

(b) Zeige

$$X^n - 1 = \prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \mid n}} \Phi_k.$$

**Abgabe** bis Dienstag, den 14. Juli um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.