Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Markus Schweighofer

§3.2 Zerlegung von Primzahlen in Zahlkörpern

Bemerkung 3.2.1. Ein wesentlicher Grund für die Betrachtung von Gittern und vor allem multiplikativen Gittern ist, dass sie oftmals „einfacher" sind als der Zahlring (zum Beispiel ist für $d \in \not\square_1$ das multiplikative Gitter $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ „einfacher" als $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] = \mathscr{O}_d$) und für gewisse Zwecke doch den Zahlring ersetzen können. Siehe Teile (b) und (c) dieser Bemerkung und Satz 3.2.2 unten. Seien K ein Zahlkörper und $x_1, \dots, x_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathscr{O}_K$.

(a) Sei $I \neq (0)$ ein Ideal von $\mathscr{O}_K$. Nach Lemma 2.5.3 gilt $I \cap \mathbb{Z} \neq (0)$, das heißt es gibt ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}$ mit $I \cap \mathbb{Z} = (m)$. Insbesondere gilt $m\mathscr{O}_K \subseteq I$ und man kann I sehen als m zusammen mit dem Bild von I unter $\mathscr{O}_K \to \mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K$ [→A2.4.11]. Ein Ideal $\neq (0)$ des Zahlrings $\mathscr{O}_K$ ist also gegeben durch eine natürliche Zahl m und ein Ideal des endlichen Rings $\mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K = (\mathbb{Z}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}x_n)/(m\mathbb{Z}x_1 + \cdots + m\mathbb{Z}x_n)$, dessen additive Gruppe in natürlicher Weise ein freier $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ ist. Insbesondere ist $\mathscr{O}_K/I$ endlich mit $\#(\mathscr{O}_K/I) \mid m^n$.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. In Anbetracht von (a) ist der m^n-elementige Ring $\mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K$ von besonderem Interesse. Um diesen zu kennen, braucht man aber den Zahlring $\mathscr{O}_K$ oft gar nicht genau zu kennen. Es reicht, ein multiplikatives Gitter M in K zu kennen mit $\underline{\underline{(m, [\mathscr{O}_K : M]) = (1)}}$. Dann gibt es $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $sm + t[\mathscr{O}_K : M] = 1$. Für jedes $x \in \mathscr{O}_K$ gilt dann

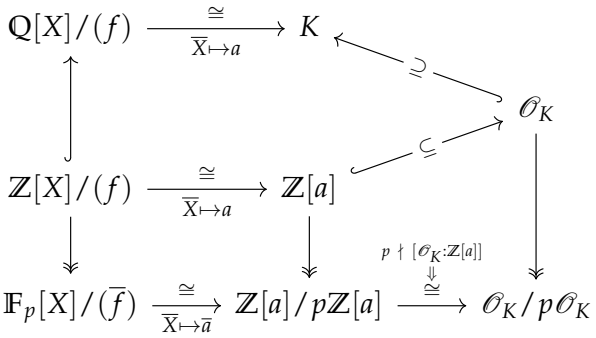
$$x = 1 \cdot x = s \underbrace{mx}_{\in m\mathscr{O}_K} + t \underbrace{[\mathscr{O}_K : M]x}_{\in M},$$

weshalb der kanonische Homomorphismus $M/mM \to \mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K$ surjektiv ist. Wegen $\#(M/mM) \overset{M \text{ Gitter}}{=} m^n = \#(\mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K)$ ist dieser auch injektiv und wir haben eine kanonische Isomorphie

$$M/mM \cong \mathscr{O}_K/m\mathscr{O}_K.$$

(c) Wir spezialisieren das unter (a) und (b) Gesagte auf Primideale. Sei $\mathfrak{p} \in M_{\mathscr{O}_K}$. Dann gibt es genau ein $p \in \mathbb{P}$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$. Insbesondere $p\mathscr{O}_K \subseteq \mathfrak{p}$ und man kann $\mathfrak{p}$ sehen als p zusammen mit dem Bild von $\mathfrak{p}$ unter $\mathscr{O}_K \to \mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$. Ein Primideal $\neq (0)$ des Zahlrings $\mathscr{O}_K$ ist also gegeben durch eine Primzahl p und ein Primideal des endlichen Ringes $\mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$, dessen additive Gruppe in natürlicher Weise ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum mit Basis $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ ist. Insbesondere ist $\#(\mathscr{O}_K/\mathfrak{p}) \in \{p, p^2, \dots, p^n\}$. Ist M ein multiplikatives Gitter in K mit $\underline{\underline{p \nmid [\mathscr{O}_K : M]}}$, so gilt kanonisch $M/pM \cong \mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$.

(d) Nach dem Satz vom primitiven Element [→A4.5.16] gibt es $a \in K$ mit $K = \mathbb{Q}(a)$. Wegen $K = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathscr{O}_K$ kann man leicht $a \in \mathscr{O}_K$ wählen. Dann ist $\mathbb{Z}[a]$ ein multiplikatives Gitter in K. Setze $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}[X]$. Nach 2.1.14 gilt $f \in \mathbb{Z}[X]$. Da f normiert ist, gilt $f\mathbb{Q}[X] \cap \mathbb{Z}[X] = f\mathbb{Z}[X]$ (benutze zum Beispiel das Lemma von Gauß [→A2.5.9(a)]). Daher kanonisch $\mathbb{Z}[X]/(f) \hookrightarrow \mathbb{Q}[X]/(f)$. Bezeichne $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$, $g \mapsto \overline{g}$ den Homomorphismus mit $\overline{m} = \overline{m}^{(p)}$ ($m \in \mathbb{Z}$) und $\overline{X} = X$ [→A2.2.7]. Dann liegt $\overline{f}$ im Kern des Epimorphismus $\mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{Z}[a]/p\mathbb{Z}[a]$ mit $X \mapsto \overline{a}$. Da f normiert ist, gilt $\deg \overline{f} = \deg f = n$ und daher $\#(\mathbb{F}_p[X]/(\overline{f})) = p^n \overset{\mathbb{Z}[a]\text{ Gitter}}{=} \#(\mathbb{Z}[a]/p\mathbb{Z}[a])$. Daher haben wir $\mathbb{F}_p[X]/(\overline{f}) \underset{\overline{X}\mapsto\overline{a}}{\overset{\cong}{\to}} \mathbb{Z}[a]/p\mathbb{Z}[a]$. Falls $\underline{\underline{p \nmid [\mathscr{O}_K : \mathbb{Z}[a]]}}$, so haben wir auch noch kanonisch $\mathbb{Z}[a]/p\mathbb{Z}[a] \cong \mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$ und es ergibt sich folgendes kommutative Diagramm:



Satz 3.2.2. *Seien $K = \mathbb{Q}(a)$ ein Zahlkörper, a ganz über $\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ mit $\underline{\underline{p \nmid [\mathscr{O}_K : \mathbb{Z}[a]]}}$, $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Z}[X]$, $m \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{Z}[X]$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ mit*

$$\overline{f} = \overline{g_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{g_m}^{\alpha_m} \qquad \text{in } \mathbb{F}_p[X],$$

wobei $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_m}$ paarweise verschiedene normierte irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ seien. Dann ist $\mathfrak{p}_i := g_i(a)\mathscr{O}_K + p\mathscr{O}_K$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein Primideal von $\mathscr{O}_K$ mit Trägheitsindex $f_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}_i) = \deg \overline{g_i}$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ sind paarweise verschieden und es gilt

$$p\mathscr{O}_K = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{\alpha_m}.$$

Beweis. Da $\mathbb{F}_p[X]$ ein Hauptidealring ist, sind die verschiedenen Primideale darin, die $(\overline{f})$ enthalten, genau die $(\overline{g_1}), \ldots, (\overline{g_m})$. Gemäß der letzten Zeile des Diagramms von 3.2.1(d) sind deren Bilder $(\overline{g_1(a)}), \ldots, (\overline{g_m(a)})$ unter

$$\varphi\colon \mathbb{F}_p[X] \to \mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K,\ \overline{X} \mapsto \overline{a}$$

genau die verschiedenen Primideale von $\mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$. Daher sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ als deren Urbilder unter $\mathscr{O}_K \to \mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$ genau die verschiedenen Primideale von $\mathscr{O}_K$, die (p) enthalten. Mit

$$e_i := e_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}_i) \qquad \text{und} \qquad f_i := f_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{p}_i) \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, m\}$$

folgt nach 2.7.5 $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m \in \mathbb{N}$,

$$p\mathscr{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{e_m} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{m} e_i f_i = n := [K : \mathbb{Q}] = \deg f = \deg \overline{f}.$$

Es gilt $f_i = [\mathscr{O}_K/(g_i(a)\mathscr{O}_K + p\mathscr{O}_K) : \mathbb{F}_p]$ und

$$\mathscr{O}_K/(g_i(a)\mathscr{O}_K + p\mathscr{O}_K) \cong (\mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K)/(\overline{g_i(a)}) \cong \mathbb{F}_p[X]/(\overline{g_i})$$

als Ring und somit als abelsche Gruppe, das heißt als $\mathbb{Z}$-Modul, also auch als $\mathbb{Z}/(p)$-Modul, das heißt als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Somit $f_i = \deg \overline{g_i}$. Wendet man φ auf die Gleichung $\overline{f} = \overline{g_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{g_m}^{\alpha_m}$ an, so erhält man $\overline{g_1(a)}^{\alpha_1} \cdots \overline{g_m(a)}^{\alpha_m} = 0$ in $\mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K$, also $\mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{\alpha_m} \subseteq p\mathscr{O}_K$, das heißt

$$1 \leq e_i = \widetilde{v}_{\mathfrak{p}_i}(p\mathscr{O}_K) \overset{2.6.4(a)}{\leq} \alpha_i$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Es folgt $n \overset{2.7.5(a)}{=} \sum_{i=1}^m e_i f_i \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \deg(\overline{g_i}) = n$ und daher $e_i = \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. □

Bemerkung 3.2.3. Sei $K = \mathbb{Q}(a)$ ein Zahlkörper, a ganz über $\mathbb{Z}$, $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a)$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p^2 \nmid N_{K|\mathbb{Q}}(f'(a))$. Dann $\underline{\underline{p \nmid [\mathscr{O}_K : \mathbb{Z}[a]]}}$, denn

$$|N_{K|\mathbb{Q}}(f'(a))| \overset{2.4.22}{=} |d(\mathbb{Z}[a])| \overset{3.1.7}{=} [\mathscr{O}_K : \mathbb{Z}[a]]^2 |d(\mathscr{O}_K)|.$$

Beispiel 3.2.4. Sei $d \in \not\square$, $p \in \mathbb{P}$ und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Da $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 2 ist, tritt nach 2.7.6 genau einer der folgenden Fälle ein:

- $p\mathscr{O}_K = \mathfrak{q}^2$ mit $\mathfrak{q} \in M_{\mathscr{O}_K}$ („p verzweigt in K“) und $\mathscr{O}_K/\mathfrak{q} \cong \mathbb{F}_p$
- $p\mathscr{O}_K \in M_{\mathscr{O}_K}$ („p träge in K“) und $\mathscr{O}_K/p\mathscr{O}_K \cong \mathbb{F}_{p^2}$
- $p\mathscr{O}_K = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ mit $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in M_{\mathscr{O}_K}$ und $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{q}_2$ („p zerlegt in K“) und

$$\mathscr{O}_K/\mathfrak{q}_1 \cong \mathscr{O}_K/\mathfrak{q}_2 \cong \mathbb{F}_p.$$

Setze $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{d})$. Nach 2.4.22 gilt $N_{K|\mathbb{Q}}(f'(\sqrt{d})) = (\sqrt{d} - (-\sqrt{d}))((-\sqrt{d}) - \sqrt{d}) = -4d$, also $p^2 \nmid N_{K|\mathbb{Q}}(f'(\sqrt{d}))$ für alle $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$. Nach 3.2.3 können wir für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ also 3.2.2 mit $a := \sqrt{d}$ anwenden. Für $p = 2$ können wir im Fall $d \in \not\square_{2,3}$ wegen $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ immer noch $a := \sqrt{d}$ setzen, während wir im Fall $d \in \not\square_1$ die kompliziertere Wahl $a := \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ treffen müssen (beachte $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(\frac{1+\sqrt{d}}{2})$).

Fall 1 $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$

Setze $a := \sqrt{d}$, $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a) = X^2 - d$.

Fall 1.1 $\overline{d}$ ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.

Wähle $c \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{d} = \overline{c}^2$ in $\mathbb{F}_p$. Dann $\overline{f} = (X - \overline{c})(X + \overline{c})$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

Fall 1.1.1 $p \mid d$

$\overline{c} = \overline{d} = 0$ und $\overline{f} = X^2$ in $\mathbb{F}_p[X]$

$p\mathcal{O}_K = \underbrace{(\sqrt{d}, p)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}}^2 \rightsquigarrow$ verzweigt

Fall 1.1.2 $p \nmid d$

$\overline{c} \neq 0$, da $\overline{d} \neq 0$ in $\mathbb{F}_p$

$\overline{c} \neq -\overline{c}$ in $\mathbb{F}_p$, da $\overline{2} \in \mathbb{F}_p^\times$ (beachte $p \neq 2$)

$p\mathcal{O}_K = \underbrace{(\sqrt{d} - c, p)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}} \underbrace{(\sqrt{d} + c, p)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}} \rightsquigarrow$ zerlegt

Fall 1.2 $\overline{d}$ ist kein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.

Dann $\overline{f}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$, also nach 3.2.2 $\quad p\mathcal{O}_K \in M_{\mathcal{O}_K}$. $\rightsquigarrow$ träge

Fall 2 $p = 2$

Fall 2.1 $d \in \not\square_{2,3}$

Setze $a := \sqrt{d}$, $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a) = X^2 - d$.

$\overline{f} = X^2 - \overline{d} = X^2 - \overline{d}^2 = (X - \overline{d})(X + \overline{d}) = (X - \overline{d})^2$ in $\mathbb{F}_2[X]$,

also nach 3.2.2 $\quad 2\mathcal{O}_K = \underbrace{(\sqrt{d} - d, 2)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}}^2 \rightsquigarrow$ verzweigt

Fall 2.2 $d \in \not\square_1$

Setze $a := \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $f := \operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(a) \overset{\substack{3.1.9 \\ 2.1.17}}{=} X^2 - X - \frac{d-1}{4}$.

Fall 2.2.1 $d \equiv_{(8)} 1$

$\overline{f} = X^2 - X = X(X - 1)$ in $\mathbb{F}_2[X]$,

also nach 3.2.2 $\quad 2\mathcal{O}_K = \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}, 2\right)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}} \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{d}}{2}, 2\right)}_{\in M_{\mathcal{O}_K}} \rightsquigarrow$ zerlegt

Fall 2.2.2 $d \equiv_{(8)} 5$

$\overline{f} = X^2 - X - 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$,

also nach 3.2.2 $\quad 2\mathcal{O}_K \in M_{\mathcal{O}_K} \rightsquigarrow$ träge