§3.4 Optimalitätskriterien und Finden optimaler Lösungen

Bemerkung 3.4.1. (a) 3.3.19 besagt, dass man den *Optimalwert* polynomialer Optimierungsprobleme mit kompakter zulässiger Menge prinzipiell durch Momentenrelaxierungen [→3.1.7] von hohem Grad beliebig genau approximieren kann, zumindest wenn man wie in 3.3.8(c) Archimedizität hergestellt hat. Die Berechnung *optimaler Lösungen*, sofern sie existieren, wurde dagegen bisher kaum angesprochen. Ein grundlegendes Problem dabei ist, dass mit zwei Optimallösungen x_1^* und x_2^* des polynomialen Optimierungsproblems (P) nicht nur die Auswertungen $\operatorname{ev}_{x_1}\colon \mathbb{R}[\underline{X}]_k \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{ev}_{x_2}\colon \mathbb{R}[\underline{X}]_k \to \mathbb{R}$ in x_1 und in x_2 Lösungen der Momentenrelaxierung (P_k) vom Grad k mit Wert P^* sind, sondern zum Beispiel auch $\frac{1}{2}\operatorname{ev}_{x_1} + \frac{1}{2}\operatorname{ev}_{x_2}$.

(b) Das in (a) angesprochene Problem ist gleichzeitig die Ursache für den Erfolg der Momentenmethode: Während man sich beim „Absteigen“ auf dem Graphen der Zielfunktion eines polynomialen Optimierungsproblems sehr leicht in lokalen Minima („Tälern“) verfängt, die keine globalen Minima sind, besteht bei der Momentenrelaxierung der geradlinige Weg $\{\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2 \mid \lambda \in [0,1]\}$ zwischen zwei zulässigen Lösungen L_1 und L_2 wieder aus zulässigen Lösungen. Auf dem Weg von einem Tal in ein tiefer gelegenes Tal, muss man also nicht auf eine Passtrasse, sondern kann sich „hinüberbeamen“. Eine andere Vorstellung ist ein Tunnel zwischen zwei Tälern, wobei man im Tunnel Probleme hat zu erahnen, wo die Enden des Tunnels liegen.

(c) In Bemerkung 3.1.10(c) haben wir gesehen, dass wir allgemeiner in einer sehr guten Situation sind, wenn wir eine optimale Lösung L einer Momentenrelaxierung kennen, die eine Quadraturformel mit allen Stützstellen in der zulässigen Menge S des ursprünglichen polynomialen Optimierungsproblems (P) besitzt. Ist dann $(\lambda_1, x_1, \dots, \lambda_r, x_r)$ eine solche Quadraturformel und sind Œ alle $\lambda_i > 0$, so gilt wegen $L(1) = 1$, dass $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$ und aus

$$P^* = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P^* \overset{x_i \in S}{\leq} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = L(f) \leq P^*$$

folgt $f(x_i) = P^*$, wobei f die Zielfunktion von (P) bezeichne. Jede Stützstelle x_i ist also dann eine optimale Lösung von (P). Erst jetzt sprechen wir das schwierige und wichtige Problem an, wie wir versuchen können, diese gute Situation detektieren zu können und wie wir gegebenenfalls die x_i ausrechnen können.

(d) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$. Wir suchen eine Quadraturformel für L (falls diese existiert), also $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$L(p) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p(x_i) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k.$$

Mit etwas mehr und anderen Worten: Wir suchen $x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ und $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ mit

$$L(p) = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$$

beziehungsweise etwas komplizierter geschrieben

$$L(p) = \left\langle \begin{pmatrix} p(x_{11},\dots,x_{1n}) & & \\ & \ddots & \\ & & p(x_{r1},\dots,x_{rn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \right\rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k.$$

Nochmals anders gesagt: Wir suchen $x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$L(p) = \left\langle p\left(\begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{rn} \end{pmatrix} \right) a, a \right\rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k.$$

Also suchen wir Diagonalmatrizen $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}^{r \times r}$ and $a \in \mathbb{R}^r$ mit

$$L(p) = \langle p(D_1, \dots, D_n)a, a \rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k,$$

wobei die Einträge der Diagonalmatrix D_i die i-ten Koordinaten der Stützstellen sind und die Einträge von a Quadratwurzeln der Gewichte sind.

(e) In (c) und (d) bleiben alle Argumente sinngemäß gültig, wenn die Quadraturformel gar keine Quadraturformel für $L\colon \mathbb{R}[\underline{X}]_k \to \mathbb{R}$ ist, sondern nur für die Einschränkung von L auf eine Untermenge von $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$, die f enthält. Im Moment beachten wir diese Erleichterung nicht weiter, obwohl sie uns später von Nutzen sein wird.

Lemma 3.4.2. *Sie V ein euklidischer Vektorraum und seien M und N selbstadjungierte Endomorphismen von V mit $M \circ N = N \circ M$. Dann ist jeder Eigenraum von M invariant unter N, das heißt $N(\ker(M - \lambda id_V)) \subseteq \ker(M - \lambda id_V)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Œ $\lambda = 0$. Sei $v \in \ker M$. Dann $M(N(v)) = N(M(v)) = N(0) = 0$. Also $N(v) \in \ker M$. □

Satz 3.4.3. *Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $n \in \mathbb{N}_0$ und $M_1, \dots, M_n$ kommutierende (das heißt $M_i \circ M_j = M_j \circ M_i$) selbstadjungierte Endomorphismen von V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, die nur aus* gemeinsamen *Eigenvektoren der M_i besteht.*

Beweis. Induktion nach n:

$\underline{n = 0}$ ✓

$\underline{n - 1 \to n \quad (n \in \mathbb{N})}$ Aus der Selbstadjungiertheit von M_1 folgt mit linearer Algebra, dass V die orthogonale Summe der Eigenräume von M_1 ist. Da nach 3.4.2 jeder Eigenraum von M_1 invariant unter $M_2, \dots, M_n$ ist, besitzt nach Induktionsvoraussetzung jeder solche Eigenraum eine Orthonormalbasis, die nur aus gemeinsamen Eigenvektoren der $M_2, \dots, M_n$ besteht. Setzt man diese Basen zusammen, so erhält man eine Basis wie gewünscht. □

Korollar 3.4.4 (simultane Diagonalisierung kommutierender symmetrischer Matrizen)**.** *Seien $r, n \in \mathbb{N}_0$ und $M_1, \dots, M_n \in S\mathbb{R}^{r \times r}$ mit $M_i M_j = M_j M_i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$ derart, dass $P^* M_i P$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Bemerkung 3.4.5. (a) Unter Beachtung der gerade behandelten simultanen Diagonalisierung können wir Bemerkung 3.4.1(e) fortführen: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$. Eine Quadraturformel für L zu finden, heißt, kommutierende Matrizen $M_1, \dots, M_n \in S\mathbb{R}^{r \times r}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^r$ zu finden mit

$$(\star) \qquad L(p) = \langle p(M_1, \dots, M_n)v, v \rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k.$$

wobei die Eigenwerte von M_i die i-ten Komponenten der r Stützstellen liefern. Abstrakter ausgedrückt: Wir suchen einen *endlichdimensionalen* euklidischen Raum V, kommutierende selbstadjungierte Endomorphismen $M_1, \dots, M_n$ von V und einen Vektor $v \in V$ mit $(\star)$, wobei die Dimension von V die Anzahl der Stützstellen ist.

(b) Sei $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]^*$ und gelte $L(p^2) > 0$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$. Dann finden wir ganz einfach einen *unendlichdimensionalen* euklidischen Raum V, kommutierende selbstadjungierte Endomorphismen $M_1, \dots, M_n$ von V und einen Vektor $v \in V$ mit

$$L(p) = \langle p(M_1, \dots, M_n)v, v \rangle \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[\underline{X}].$$

Es wird nämlich $V := \mathbb{R}[\underline{X}]$ vermöge

$$\langle p, q \rangle := L(pq) \qquad (p, q \in V)$$

zu einem euklidischen Vektorraum, die „Multiplikationsoperatoren"

$$M_i \colon V \to V, \ p \mapsto X_i p$$

sind selbstadjungiert und kommutieren und mit $v := 1 \in \mathbb{R}[\underline{X}] = V$ gilt

$$L(p) = \langle p(M_1, \dots, M_n)v, v \rangle \text{ für alle } p \in V.$$

Diese geniale Konstruktion stammt von Gelfand, Neumark und Segal (GNS) [Israel Moissejewitsch Gelfand *1913 †2009, Mark Aronowitsch Neumark *1909 †1978, Irving Ezra Segal *1918 †1998].

(c) Das Hauptproblem mit der Konstruktion in (b) ist, dass V dort unendlichdimensional ist. Wir werden dies versuchen zu lösen, indem wir den Multiplikationsoperator modifizieren durch Anwendung einer orthogonalen Projektion nach der Multiplikation, um den Grad zu „schröpfen“. Diese Modifikation kann allerdings leicht die Eigenschaft des Kommutierens zerstören. Ein kleineres Problem ist, dass wir in (b) $L(p^2) > 0$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$ brauchten, weil ein Skalarprodukt positiv definit sein muss. Wir würden gerne nur $L(p^2) \geq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ voraussetzen. Dieses Problem werden wir durch Übergang zu einem Quotienten lösen.

Notation und Proposition 3.4.6. *Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist*

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid L(p^2) = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$, den wir als GNS-Kern *von L bezeichnen und wir bezeichnen den Quotientenraum $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ als den* GNS-Darstellungsraum *von L. Durch*

$$\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L := L(pq) \qquad (p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d)$$

wird ein Skalaprodukt auf V_L definiert, welches wir als das GNS-Skalarprodukt *von L bezeichnen. Dadurch wird V_L zu einem endlichdimensionalen euklidischen Raum. Wir nennen die orthogonale Projektion π_L von V_L auf den Unterraum $\{\overline{p} \mid p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}\}$ die* GNS-Trunkierung *von L (beachte $\deg 0 = -\infty <= d-1$). Dann ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$*

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus von $\pi_L V_L$, den wir den i-ten trunkierten GNS-Multiplikationsoperator *von L nennen.*

Beweis. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ gilt

$$0 \leq L((p + tq)^2) = L(p^2) + 2tL(pq) + t^2 L(q^2),$$

weshalb das Polynom $L(q^2)T^2 + 2L(pq)T + L(p^2) \in \mathbb{R}[T]_2$ im Fall $L(pq) \neq 0$ den Grad 2 und Diskriminante $4L(pq)^2 - 4L(p^2)L(q^2) \leq 0$ hat. Es gilt also die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$L(pq)^2 \leq L(p^2)L(q^2) \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d.$$

Hieraus folgt sofort $\{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid L(p^2) = 0\}$. Dass U_L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ ist, folgt direkt daraus, dass L linear ist. Es ist klar, dass $\langle ., . \rangle_L$ eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform ist, die wegen $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ positiv semidefinit ist. Hieraus folgt, dass $\langle ., . \rangle_L$ sogar positiv definit und daher ein Skalarprodukt ist, denn ist $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ mit $\langle \overline{p}, \overline{p} \rangle_L = 0$, so gilt $L(p^2) = 0$ und daher $p \in U$, das heißt $\overline{p} = 0$. Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Um zu zeigen, dass M_{L_i} wohldefiniert ist, müssen wir $\pi_L(\overline{X_i p}) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} \cap U_L$ zeigen, was aber nach Wahl von $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ mit $\overline{q} = \pi_L(\overline{X_i p})$ aus

$$\langle \overline{q}, \overline{q} \rangle_L = \langle \overline{X_i p}, \overline{q} \rangle = L(X_i pq) = L(p(X_i q)) = \langle \overline{p}, \overline{X_i q} \rangle_L = 0$$

folgt. Um schließlich zu zeigen, dass $M_{L,i}$ selbstadjungiert ist, seien $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle M_{L,i}(\overline{p}), \overline{q} \rangle_L &= \langle \pi_L(\overline{X_i p}), \overline{q} \rangle_L = \langle \overline{X_i p}, \pi_L(\overline{q}) \rangle_L \overset{\overline{q} \in \pi_L V_L}{=} \langle \overline{X_i p}, \overline{q} \rangle_L = L(X_i pq) \\ &= L(p(X_i q)) = \langle \overline{p}, \overline{X_i q} \rangle_L \overset{\overline{p} \in \pi_L V_L}{=} \langle \pi_L(\overline{p}), \overline{X_i q} \rangle_L = \langle \overline{p}, \pi_L(\overline{X_i q}) \rangle_L = \langle \overline{p}, M_{L,i}(\overline{q}) \rangle_L. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4.7. Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$. Dann gilt

$$\overline{p} \in \pi_L V_L \iff \overline{p} = \pi_L(\overline{p}) \iff p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Lemma 3.4.8. *Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, dass die trunkierten GNS-Multiplikationsoperatoren von L kommutieren. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$*

$$p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) = \pi_L(\overline{p}).$$

Beweis. Œ sei p ein Monom, etwa $p = \underline{X}^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq d$. Wir führen Induktion nach $k := |\alpha| \in \{0, \dots, d\}$.

<u>k=0</u> $\mathrm{id}_{\pi_{V_L}}(\overline{1}) = \overline{1} = \pi_L(\overline{1})$ ✓

<u>$k - 1 \to k \quad (1 \leq k \leq d)$</u> Schreibe $p = X_i q$ mit $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Dann $q = \underline{X}^\beta$ für ein $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = k - 1$, also $q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) = \pi_L(\overline{q}) = \overline{q}$ nach Induktionsvoraussetzung und Bemerkung 3.4.7. Es folgt

$$\begin{aligned} p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) &= (M_{L,i} \circ q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n}))(\overline{1}) = M_{L,i}(q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1})) \\ &= M_{L,i}(\overline{q}) = \pi_L(\overline{X_i q}) = \pi_L(\overline{p}). \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.9. *Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, dass die trunkierten GNS-Multiplikationsoperatoren von L kommutieren und betrachte den Unterraum*

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^m p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d-1}$$

von $\mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}$. Dann besitzt $L|_{W_L}$ eine Quadraturformel [→2.3.5].

Beweis. Analog zu 3.4.5(a) [→3.4.1(e)] reicht es zu zeigen, dass für alle $g \in W_L$ gilt

$$L(g) = \langle g(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})\overline{1}, \overline{1} \rangle_L.$$

Hierzu reicht es zu zeigen, dass für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ und $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$ gilt

$$L(pq) = \langle p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})\overline{1}, \overline{1}\rangle_L.$$

Da die GNS-Multiplikationsoperatoren $M_{L,i}$ selbstadjungiert sind und kommutieren, ist dies gleichbedeutend mit

$$L(pq) = \langle p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})\overline{1}, q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})\overline{1}\rangle_L$$

für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ und $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Mit Lemma 3.4.8 und Bemerkung 3.4.7 heißt dies nichts anderes als

$$L(pq) = \langle \pi_L(\overline{p}), \overline{q}\rangle_L$$

für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ und $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Da π_L als orthogonale Projektion selbstadjungiert ist, gilt schließlich

$$\langle \pi_L(\overline{p}), \overline{q}\rangle_L = \langle \overline{p}, \pi_L(\overline{q})\rangle_L \overset{3.4.7}{=} \langle \overline{p}, \overline{q}\rangle_L \overset{3.4.6}{=} L(pq).$$

□

Beispiel 3.4.10. Die GNS-Multiplikationsoperatoren von

$$L\colon \mathbb{R}[X_1, X_2]_4 \to \mathbb{R},\ p \mapsto \frac{1}{4}(p(-1,0) + p(1,0) + p(0,-1) + p(0,1))$$

kommutieren nicht: Man prüft leicht nach, dass $\overline{1}$, $\overline{\sqrt{2}X_1}$, $\overline{\sqrt{2}X_2}$ eine Orthonormalbasis von $\pi_L V_L$ bilden. Wir behaupten, dass $M_{L,1}(M_{L,2}(\overline{X_1})) \neq M_{L_2}(M_{L,1}(\overline{X_1}))$. In der Tat gilt $X_1X_2 \in U_L$ und daher

$$M_{L,1}(M_{L,2}(\overline{X_1})) = M_{L,1}(\pi_L(\overline{X_2X_1})) = M_{L,1}(\pi_L(0)) = 0$$

und andererseits

$$\begin{aligned} M_{L,1}(\overline{X_1}) &= \pi_L(\overline{X_1^2}) = \langle \overline{1}, \overline{X_1^2}\rangle_L\overline{1} + \underbrace{\langle \overline{\sqrt{2}X_1}, \overline{X_1^2}\rangle_L}_{=0}\overline{\sqrt{2}X_1} + \underbrace{\langle \overline{\sqrt{2}X_2}, \overline{X_1^2}\rangle_L}_{=0}\overline{\sqrt{2}X_2} \\ &= L(X_1^2)\overline{1} = \overline{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und daher $M_{L,2}(M_{L,1}(\overline{X_1})) = M_{L,2}(\overline{\tfrac{1}{2}}) = \overline{\tfrac{1}{2}X_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\sqrt{2}X_2} \neq 0$.

Definition 3.4.11. Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Man nennt L *flach*, wenn $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ [→3.4.9]

Proposition 3.4.12. *Sei $d \in \mathbb{N}_0$, $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$. Dann gilt $U_{L'} = U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ und folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *L ist flach.*

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) *Die kanonische Abbildung*

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

ist ein Isomorphismus.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

(f) *Die „Momentenmatrizen"* [$\to$3.1.12(f)] $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta|\le d-1}$ *und* $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta|\le d}$ *haben denselben Rang.*

Beweis. $U_{L'} = U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ und (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d) $\iff$ (e) sind klar.

<u>(e) $\iff$ (f)</u> $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta})_{|\alpha|,|\beta|\le d}$ ist die Darstellungsmatrix der Bilinearform

$$\mathbb{R}[\underline{X}]_d \times \mathbb{R}[\underline{X}]_d \to \mathbb{R},\ (p,q) \mapsto L(pq)$$

bezüglich der Monombasis und damit die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\mathbb{R}[\underline{X}]_d \to \mathbb{R}[\underline{X}]_d^*,\ p \mapsto (q \mapsto L(pq))$ bezüglich der Monombasis und der dazu dualen Basis. Der Kern dieser linearen Abbildung ist U_d, weswegen die Matrix den Rang $\dim \mathbb{R}[\underline{X}]_d - \dim U_d = \dim(\mathbb{R}[\underline{X}]/U_d) = \dim(V_d)$ hat. Analoges gilt für $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta})_{|\alpha|,|\beta|\le d-1}$. □

Satz 3.4.13. *Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$. Ist L flach, so kommutieren die GNS-Multiplikationsoperatoren von L.*

Beweis. Seien L flach, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ und $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$. Zu zeigen:

$$M_{L,i}(M_{L_j}(\overline{p})) = M_{L,j}(M_{L,i}(\overline{p})).$$

Schreibe $X_i p = p' + q'$ und $X_j p = p'' + q''$ mit $p', p'' \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ und $q', q'' \in U_L$. Dann gilt $M_{L,i}(\overline{p}) = \pi_L(\overline{X_i p}) = \pi_L(\overline{p'}) + \pi_L(\overline{q'}) = \overline{p'} + 0 = \overline{p'}$ und analog $M_{L,j}(\overline{p}) = \overline{p''}$. Es ist also $\pi_L(\overline{X_i p''}) = \pi_L(\overline{X_j p'})$ zu zeigen. Hierzu reicht es

$$\langle \pi_L(\overline{X_i p''}), \overline{f} \rangle = \langle \pi_L(\overline{X_j p'}), \overline{f} \rangle_L$$

für alle $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ zu zeigen. Sei also $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ und $g \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ mit $\overline{g} = \pi_L(\overline{f})$. Dann

$$\begin{aligned}
\langle \pi_L(\overline{X_i p''}), \overline{f} \rangle_L &= \langle \overline{X_i p''}, \pi_L(\overline{f}) \rangle_L = \langle \overline{X_i p''}, \overline{g} \rangle_L = L(X_i p'' g) = \langle \overline{p''}, \overline{X_i g} \rangle_L \\
&= \langle \overline{X_j p}, \overline{X_i g} \rangle_L = L(X_j p X_i g) = L(X_i p X_j g) = \langle \overline{X_i p}, \overline{X_j g} \rangle_L \\
&= \langle \overline{p'}, \overline{X_j g} \rangle_L = L(p' X_j g) = \langle \overline{X_j p'}, \overline{g} \rangle_L = \langle \overline{X_j p'}, \pi_L(\overline{f}) \rangle_L = \langle \pi_L(\overline{X_j p'}), \overline{f} \rangle_L.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.4.14 (Curto und Fialkow)**.** [Raul Curto, Lawrence Fialkow] *Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$. Ist L flach, so besitzt L eine Quadraturformel.*

Beweis. 3.4.9, 3.4.11 und 3.4.13 □