Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (4P) (Existenz der Primärzerlegung von Idealen nochmals beweisen)
Sei R ein kommutativer Ring. Man nennt ein Ideal I von R *irreduzibel*, wenn $1 \notin I$ und für alle Ideale J und K von R mit $I = J \cap K$ stets schon $I = J$ oder $I = K$ gilt. Sei nun R noethersch. Zeige:

(a) Jedes irreduzible Ideal von R ist primär.

(b) Jedes Ideal von R lässt sich als endlicher Schnitt irreduzibler Ideale schreiben (wobei $\bigcap \emptyset := \mathbb{R}$).

Hinweis zu (b): Begründe, warum man ohne Einschränkung das Nullideal betrachten kann. Danach seien $a, b \in R$ und $ab \in (0)$ mit $a \notin (0)$. Betrachte die aufsteigende Kette der Ideale $\operatorname{ann}(b^1) \subseteq \operatorname{ann}(b^2) \subseteq \operatorname{ann}(b^3) \subseteq \ldots$ und zeige, dass $(a) \cap (b^n) = (0)$ für große $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4P) (Irreduzible Radikalideale)
Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Zeige, dass in R die Primideale genau die irreduziblen Radikalideale sind. Ist die Voraussetzung der Noetherzität notwendig?

Aufgabe 3 (4P) (Beispiel für Tiefe $\neq$ Höhe)
Finde einen kommutativen Ring R, einen R-Modul M und ein Ideal I von R so, dass die Höhe und Tiefe von M bezüglich I nicht übereinstimmen.

Aufgabe 4 (4P) (Vertauschung von Nichtnullteilern)
Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und x_1, x_2 eine Nichtnullteilerfolge in R, das heißt für den R-Modul R. Sei weiter kein Nullteiler von R in $1 - (x_1)$ enthalten. Zeige, dass dann auch x_2, x_1 eine Nichtnullteilerfolge in R ist.

Abgabe bis Freitag, den 24. Juni 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.