Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2016

Übungsblatt 11 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (3P) Sei K ein unendlicher Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass K^n keine Vereinigung von endlich vielen echten affinen Unterräumen ist.

Aufgabe 2 (4P für $n = 2$ + ein Mensa-Grillessen für eine komplette Lösung) Sei R ein kommutativer noetherscher Ring, welcher einen unendlichen Körper K als Unterring enthält, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $a_1, ..., a_n$ eine Nichtnullteilerfolge für M. Zeige, dass es dann $c_{i,j} \in K$ $(i, j \in \{1, ..., n\}^2, i > j)$ gibt so, dass die n Elemente

$$a_1, \quad a_2 + c_{2,1}a_1, \quad a_3 + c_{3,1}a_1 + c_{3,2}a_2, \quad \ldots, \quad a_n + c_{n,1}a_1 + ... + c_{n,n-1}a_{n-1}$$

in jeder beliebigen Reihenfolge eine Nichtnullteilerfolge für M bilden.

Hinweis: Überlege dir zuerst den Fall $n = 2$ und führe dann eine Induktion durch. Benutze dabei Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (6P)
Prüfe, ob für alle noetherschern Ringe R und alle endlich erzeugten R-Moduln M jeweils gilt:

(a) $(\operatorname{ass} M)^{\min} \subseteq (\operatorname{ass}(R/\operatorname{ann} M))^{\min}$

(b) $(\operatorname{ass}(R/\operatorname{ann} M))^{\min} \subseteq (\operatorname{ass} M)^{\min}$

(c) $\operatorname{ass} M \subseteq \operatorname{ass}(R/\operatorname{ann} M)$

(d) $\operatorname{ass}(R/\operatorname{ann} M) \subseteq \operatorname{ass} M$

Aufgabe 4 (4P) Ein Ring heißt *Cohen-Macaulay-Ring*, wenn er ein Cohen-Macaulay-Modul über sich selbst ist. Zeige, dass jeder kommutative lokale noethersche reduzierte Ring von Dimension kleiner gleich 1 ein Cohen-Macaulay-Ring ist.

Abgabe bis Freitag, den 1. Juli 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.