**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2016**

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

---

# Übungsblatt 12 zur Kommutativen Algebra

---

**Aufgabe 1 (4P)** Sei $K$ ein Körper und $f \in \mathfrak{m} := (X_1, ..., X_n) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$. Betrachte den Ring $R := K[X_1, \ldots, X_n]/(f)$, den kanonischen Ringepimorphismus $\varphi \colon K[X_1, \ldots, X_n] \to R$, $f \mapsto \overline{f}$ und das maximale Ideal $\overline{\mathfrak{m}} := \varphi(\mathfrak{m})$ von $R$. Zeige, dass $R_{\overline{m}}$ genau dann ein regulärer lokaler Ring ist, wenn $f = 0$ oder wenn nicht alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ von $f$ im Nullpunkt verschwinden.

**Aufgabe 2 (4P)** Zeige, dass die regulären lokalen Ring der Dimension 1 genau die lokalen Hauptidealringe sind, die keine Körper sind.

**Aufgabe 3 (4P)** Sei $R$ ein kommutativer lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Wir nennen ein Ideal $I \subseteq \mathfrak{m}$ von $R$ *prinzipiell*, wenn es sich von $\operatorname{ht}(I)$ vielen Elementen erzeugen lässt. Ein Ideal $I$ von $R$ heißt *ungemischt*, wenn $\operatorname{ass}_R(R/I) = (\operatorname{ass}_R(R/I))^{\min}$. Zeige, dass $R$ genau dann ein Cohen-Macaulay-Ring ist, wenn jedes prinzipielle Ideal von $R$ ungemischt ist.

**Freiwillige Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte) für algebraische Geometer**
Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $K = C$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir erinnern daran oder informieren darüber, dass wir in den Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie im Wintersemester 2015/2016 gezeigt haben, dass für zwei irreduzible affine Untervarietäten $V \subseteq \mathbb{A}^m$, $W \subseteq \mathbb{A}^n$ auch $V \times W$ wieder eine irreduzible Untervarietät von $\mathbb{A}^{m+n}$ ist. Dieses Ergebnis darf im folgenden benutzt werden. Seien nun $M \subseteq \mathbb{A}^m$ sowie $N \subseteq \mathbb{A}^n$ zwei affine Untervarietäten. Zeige mit den Mitteln der Vorlesung, dass $\dim(M \times N) = \dim(V) + \dim(W)$.

**Abgabe bis Montag, den 11. Juli 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.**