Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2016

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (6P) Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ *multiplikativ*, das heißt $1 \in S$ und $st \in S$ für alle $s, t \in S$. Sei weiter M ein R-Modul. Wir nennen ein Element $a \in R$ einen *Nichtnullteiler* für M, wenn $ax \neq 0$ für alle $x \in M \setminus \{0\}$, andernfalls nennen wir a einen *Nullteiler* für M.

(a) Zeige, dass auf $M \times S$ durch
$$(x,s) \sim (y,t) :\Longleftrightarrow \exists u \in S : utx = usy \qquad (x,y \in M,\ s,t \in S)$$
eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert wird.

(b) Zeige, dass die Abbildungen
$$+\colon ((M \times S)/\sim) \times ((M \times S)/\sim) \to (M \times S)/\sim,\ (\widetilde{(x,s)}, \widetilde{(y,t)}) \to \widetilde{(tx+sy, st)} \quad \text{und}$$
$$\cdot\colon ((R \times S)/\sim) \times ((M \times S)/\sim) \to (M \times S)/\sim,\ (\widetilde{(a,s)}, \widetilde{(x,t)}) \to \widetilde{(ax, st)}$$
($a \in R,\ x,y \in M,\ s,t \in S$) wohldefiniert sind.

(c) Zeige, dass vermöge $+$ die Menge $(M \times S)/\sim$ zu einer abelschen Gruppe wird.

(d) Zeige, dass vermöge $+$ und $\cdot$ im Falle $M = R$ die Menge $(R \times S)/\sim$ zu einem kommutativen Ring wird.

(e) Zeige, dass $(M \times S)/\sim$ durch $+$ und $\cdot$ zu einem $((R \times S)/\sim)$-Modul wird.

(f) Zeige, dass $\iota\colon M \to ((M \times S)/\sim),\ x \mapsto \widetilde{(x,1)}$ ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker \iota = \{x \in M \mid \exists s \in S : sx = 0\}$.

(g) Zeige, dass ι injektiv ist genau dann, wenn S nur aus Nichtnullteilern für M besteht.

(h) Zeige, dass $\iota_0\colon R \to (R \times S)/\sim,\ x \mapsto \widetilde{(x,1)}$ ein Ringhomomorphismus ist mit $\iota_0(s) \in ((R \times S)/\sim)^\times$ für alle $s \in S$.

(i) Zeige, dass $\widetilde{(x,s)} = \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für alle $x \in M$ und $s \in S$ (wobei $\frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für $\iota_0(s)^{-1}\iota(x)$ steht).

Zur Vereinfachung der Notation schreibt man oft
$$\frac{x}{s} \qquad \text{statt} \qquad \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)} = \widetilde{(x,s)} \qquad (x \in M, s \in S) \qquad \text{und dann auch}$$
$$S^{-1}M \qquad \text{statt} \qquad \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in M, s \in S \right\} = (M \times S)/\sim .$$
Wir nennen $S^{-1}R$ und $S^{-1}M$ die *Lokalisierungen* von R und M nach S.

Aufgabe 2. (12P) Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ.

(a) Seien M und N zwei R-Moduln und f ein R-Modulhomomorphismus. Zeige, dass es dann genau einen $S^{-1}R$-Modulhomomorphismus $S^{-1}f\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x \mapsto \frac{x}{1}"'] & N \arrow[d, "y \mapsto \frac{y}{1}"] \\ S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}f"'] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir nennen $S^{-1}f$ die *Lokalisierung* von f nach S.

(b) Sei M ein R-Modul. Zeige $S^{-1}\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$.

(c) Sei $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ eine Sequenz von R-Moduln. Zeige $S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

(d) Überlege und argumentiere, inwiefern und warum Lokalisieren nach S (von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen) kommutative Diagramme in kommutative Diagramme überführt.

(e) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer halbexakten Sequenz von R-Moduln wieder eine halbexakte Sequenz von R-Moduln liefert.

(f) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer exakten Sequenz von R-Moduln wieder eine exakte Sequenz von R-Moduln liefert.

(g) Sei N ein Untermodul des R-Moduls M. Zeige, dass man $S^{-1}N$ in kanonischer Weise als Untermodul des $(S^{-1}R)$-Moduls $S^{-1}M$ auffassen kann und dass eine kanonische Isomorphie $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ von $S^{-1}R$-Moduln besteht.

(h) Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeige $S^{-1}\bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i$.

(i) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein endlich erzeugter $S^{-1}R$-Modul ist.

(j) Sei M ein R-Modul. Zeige, dass jeder Untermodul des $(S^{-1}R)$-Moduls $S^{-1}M$ von der Form $S^{-1}N$ für einen Untermodul N von M ist.

(k) Sei M ein noetherscher R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}R$-Modul ist.

(l) Seien M ein R-Modul und $T \subseteq R$ multiplikativ mit $S \subseteq T$. Zeige, dass eine kanonische Isomorphie $\iota_0(T)^{-1}S^{-1}R \cong T^{-1}R$ besteht, wobei $\iota_0 : R \to S^{-1}R$ der kanonische Homomorphismus ist. Zeige, dass auch eine kanonische Isomorphie

$\iota_0(T)^{-1}S^{-1}M \cong T^{-1}M$ besteht, wobei wir die beiden Ringe $\iota_0(T)^{-1}S^{-1}R$ und $T^{-1}R$ miteinander identifizieren. Hinweis: Man kann die Charakterisierungen der Lokalisierungen 1.2.4 und 1.2.8(a) aus der Vorlesung benutzen.

Abgabe bis Freitag, den 29. April 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.