Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (4P) (Artinsche Ringe sind noethersch I)
Ein Ring heiße artinsch, wenn er als Modul über sich selbst artinsch ist. Sei R ein kommutativer Ring, in dem das Nullideal ein Produkt von endlich vielen maximalen Idealen ist. Zeige, dass dann folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) R ist noethersch.

(b) R ist artinsch.

(c) R hat endliche Länge.

Hinweis: Seien $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r$ maximale Ideale von R mit $(0) = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r$. Betrachte die Kette $R \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq ... \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r = (0)$ und die zugehörigen Faktoren.

Aufgabe 2 (6P) (Artinsche Ringe sind noethersch II)
Sei R ein kommutativer artinscher Ring. Zeige:

(a) Jedes Primideal von R ist maximal.

(b) Es gibt nur endlich viele maximale Ideale in R.

(c) In R ist das Nilradikal nilpotent, das heißt es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Nil}(R)^n = (0)$.

Hinweis: Nimm an, die Aussage stimmt nicht. Da R artinsch ist, können wir $m \in \mathbb{N}$ wählen mit $(\operatorname{Nil} R)^{m+k} = (\operatorname{Nil} R)^m$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wähle $H \in \{I \subseteq R \text{ Ideal} \mid I\,(\operatorname{Nil} R)^m \neq 0\}^{\min}$. Finde danach ein Element $x \in H$ mit $(x) = (x)\operatorname{Nil}(R)^m$ und führe dies zum Widerspruch.

Aufgabe 3 (2P) (Artinsche Ringe sind noethersch III)
Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann artinsch ist, wenn er noethersch ist und Dimension ≤ 0 hat.

Aufgabe 4 (4P) (Zerlegung von artinschen Ringen)
Zeige, dass jeder kommutative artinsche Ring isomorph ist zu einem endlichen direkten Produkt von lokalen artinschen Ringen.

Abgabe bis Freitag, den 20. Mai 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.