Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2016

Übungsblatt 7 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (4P) (Satz von Cohen)
Sei R ein kommutativer Ring und betrachte die durch Inklusion halbgeordnete Menge

$$M := \{I \mid I \text{ nicht endlich erzeugtes Ideal von } R\}.$$

Zeige:

(a) Ist R nicht noethersch, so besitzt M ein maximales Element.

(b) Jedes maximale Element von M ist ein Primideal.

(c) R ist noethersch genau dann, wenn in R jedes Primideal endlich erzeugt ist.

Hinweis zu (b): Sei I ein maximales Element von M. Nehme an, dass es $x, y \in R \setminus I$ gibt mit $xy \in I$. Finde dann zwei echte Oberideale G, H von I mit $I = G + (x)H$.

Aufgabe 2. (8P) (Primärzerlegung im Polynomring)
Sei R ein kommutativer Ring, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ mit $a_i \in R$ und I ein Ideal in R. Zeige:

(a) In R ist die Summe eines nilpotentes Elementes und einer Einheit stets wieder eine Einheit.

(b) $f \in R[X]^\times \iff (a_0 \in R^\times \,\&\, a_1, \dots, a_n \in \operatorname{Nil} R)$

Hinweis: Wenn $n \geq 1$ und $f \sum_{i=0}^{m} b_i X^i = 1$ mit $b_i \in R$, zeige per Induktion, dass $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ für alle $r \in \{0, \dots, m\}$. Wende (a) auf $R[X]$ statt R an.

(c) $f \in \operatorname{Nil} R[X] \iff a_0, \dots, a_n \in \operatorname{Nil} R$

(d) f ist in $R[X]$ genau dann ein Nullteiler, wenn es $a \in R \setminus \{0\}$ mit $af = 0$ gibt.

Hinweis: Ist $g \in R[X] \setminus \{0\}$ von minimalem Grad mit $fg = 0$, so zeige $a_i g = 0$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

(e) Ein Ideal I von R erzeugt in $R[X]$ das Ideal $I[X] := \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in I\}$.

(f) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $\mathfrak{p}[X]$ ein Primideal von $R[X]$.

(g) Ist I ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal von R, so ist $I[X]$ ein $\mathfrak{p}[X]$-primäres Ideal von $R[X]$.

(h) Ist $I = \bigcap_{k=1}^{n} \mathfrak{q}_k$ eine Primärzerlegung des Ideals I von R, so ist $I[X] = \bigcap_{k=1}^{n} \mathfrak{q}_k[X]$ eine Primärzerlegung von $I[X]$.

Aufgabe 3. (4P) (Ein Beispiel einer Primärzerlegung) Sei K ein Körper. Finde in $K[X_1, \ldots, X_n]$ eine Primärzerlegung des Ideals $I := (X_1)(X_1, X_2) \cdots (X_1, \ldots, X_n)$.

Abgabe bis Freitag, den 3. Juni 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.