Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (10P) (Primärzerlegung in nicht noetherschen Ringen)
Bestimme für jeden der nachfolgenden nicht noetherschen Ringe die zum ganzen Ring assoziierten Primideale und überprüfe, ob das Nullideal eine Primärzerlegung besitzt. Falls nicht, begründe kurz, warum die Beweismethode für die Existenz der Primärzerlegung im noetherschen Fall aus der Vorlesung in diesem Spezialfall nicht funktioniert.

(a) $A = \mathbb{R}[X_n \mid n \in \mathbb{N}]/(X_i^2 \mid n \in \mathbb{N})$

(b) $B = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ mit der symmetrischen Mengendifferenz $\triangle$ als Addition und dem Schnitt $\cap$ als Multiplikation.

(c) $C = C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f stetig}\}$

Bonus (2 BP): Bestimme in (c) alle maximalen Ideale. Wer beim Begriff des *Filters* jetzt nicht an Flüssigkeiten denkt, kann dies auch in (b) versuchen.

Aufgabe 2. (6P)
Sei R ein kommutativer noetherscher Ring, I ein Ideal in R und $J := \bigcap_{k=1}^{\infty} I^k$.

(a) Zeige, dass $J = (0)$ gilt genau dann, wenn $1 - I$ keinen Nullteiler von R enthält.

(b) Sei R ein Integritätsbereich und $1 \notin I$. Zeige $J = (0)$.

(c) Sei R lokal und $1 \notin I$. Zeige $J = (0)$.

Hinweis: Zeige $J = IJ$ mittels einer Primärzerlegung von IJ.

Abgabe bis Freitag, den 10. Juni 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.