Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

(a) Welche der folgenden Ausdrücke definieren keine Mengen und warum nicht?

(b) Welche der definierte Mengen ist Teilmenge von welchen anderen? Welche der definierten Mengen ist Element von welchen anderen? Dabei bezeichne A_i die durch den Ausdruck in (i) definierte Menge, falls dieser Ausdruck eine Menge definiert.

(c) Welche der definierten Mengen sind gleich?

(d) Wieviele Elemente haben die jeweiligen Mengen?

(1) $\{x \geq x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(2) $\{x \in \{1,2,3\} \mid 0 \leq 1\}$

(3) $\{x \in \{1,2,3\} \mid 1 \leq 0\}$

(4) $\{1,2\}$

(5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(6) $\{13 \leq 14\}$

(7) $\{\{x, \{y\}\} \mid x \in \{1,3\}, y \in \{2,x\}\}$

(8) $\{x \in \emptyset \mid x = \emptyset\}$

(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$

(10) $\{\}\{\{\{\}\{\{\}\}\}\}$

(11) $\}\}\}\{\{\{$

(12) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 0\}$

(13) $\{x \subseteq \{1,2,3\} \mid \#x = 2\}$

(14) $\{7 \mid 2 \geq 3\}$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Begründe jeweils Deine Aussage.

(a) $\forall x : \exists y : (y \neq \emptyset \implies x \neq x)$

(b) $\exists x \in \{0,1\} : \forall y \in \{0,1\} : \exists z \in \{0,1\} : (y \neq x \implies y \neq z)$

(c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

(d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : y > x$

Aufgabe 3: Finde explizite Darstellungen für folgende Mengen:

(a) $(\{\text{Birne,Elefant,Eiffelturm}\} \cup \{1, 2, ..., 500\}) \cap$
$(\{x \mid x \text{ Säugetier}\} \cup \{x \mid x \text{ Kubikzahl}\})$

(b) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$

(c) $(\{2i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\}) \setminus \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 0\}$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Deine Antworten.

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$

(c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^3$

(d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

(e) Die Abbildung von der Menge aller (derzeit lebenden) Menschen in die Menge der Wochentage, die jedem Menschen den Wochentag zuordnet, an dem er geboren ist.

(f) Die Abbildung von der Menge aller Menschen nach $\mathbb{N}$, die jedem Menschen sein Geburtsjahr zuordnet.

(g) $t\colon \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{P}$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen bezeichnet und t die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ die größte Primzahl p zuordnet, die n teilt.

(h) $d\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, wobei $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen bezeichnet und d die Funktion ist, die jeder natürlichen Zahl n ihr Doppeltes $2n$ zuordnet.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien A, B und C endliche Mengen. Zeige:
$\sharp(A \cup B \cup C) = \sharp A + \sharp B + \sharp C - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) - \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Die Bearbeitungszeit beträgt ausnahmsweise zwei Wochen. Abgabe bis Montag, den 6. November 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.