Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und betrachte die Menge $S_n := \{\sigma \mid \sigma\colon I \to I \text{ bijektiv}\}$ aller Permutationen auf $I := \{1, \dots, n\}$.

(a) Zeige, dass durch

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n) :\iff \exists \sigma \in S_n : (a_1, \dots, a_n) = (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \qquad (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\})$$

eine Äquivalenzrelation auf $\{0, 1\}^n$ definiert wird.

(b) Zeige, dass

$$\Psi\colon \{0, 1\}^n/\sim\, \to \{0, \dots, n\},\ \widetilde{(a_1, \dots, a_n)} \mapsto \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i = 1\}$$

eine (wohldefinierte!) Bijektion ist und gib explizit die Umkehrfunktion Ψ^{-1} an.

(c) Zeige, dass

$$\Phi\colon \{0, 1\}^n/\sim\, \to \{0, 1\}^n/\sim,\ \widetilde{(a_1, \dots, a_n)} \mapsto \widetilde{(1 - a_1, \dots, 1 - a_n)}$$

eine (wohldefinierte!) Bijektion ist und gib explizit die Umkehrfunktion Φ^{-1} an.

(d) Bestimme explizit $\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$.

Aufgabe 2: Wir nennen eine Funktion $f\colon A \to B$ *twinjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ höchstens *zwei* $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$, das heißt

$$f \text{ twinjektiv} \iff$$
$$\forall a_1, a_2, a_3 \in A : (f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) \implies (a_1 = a_2 \text{ oder } a_1 = a_3 \text{ oder } a_2 = a_3)).$$

Wir nennen sie *superjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ mindestens *zwei* $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$, das heißt

$$f \text{ superjektiv} \iff \forall b \in B : \exists a_1, a_2, \in A : (a_1 \neq a_2 \ \&\ f(a_1) = b = f(a_2)).$$

Welche der folgenden Aussagen gelten (Beweis oder Gegenbeispiel)?

(a) Jede injektive Abbildung ist twinjektiv.

(b) Jede twinjektive Abbildung ist injektiv.

(c) Jede surjektive Abbildung ist superjektiv.

(d) Jede superjektive Abbildung ist surjektiv.

(e) Die Hintereinanderschaltung zweier twinjektiver Abbildungen ist stets twinjektiv.

(f) Die Hintereinanderschaltung zweier superjektiver Abbildungen ist stets superjektiv.

(g) Schaltet man eine twinjektive Abbildung hinter eine injektive Abbildung, so erhält man stets eine twinjektive Abbildung.

(h) Schaltet man eine injektive Abbildung hinter eine twinjektive Abbildung, so erhält man stets eine twinjektive Abbildung.

Aufgabe 3:

(a) Finde eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, die nicht injektiv ist.

(b) Finde eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, die nicht injektiv ist.

Aufgabe 4: Es seien X, Y Mengen und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir sagen, eine Funktion $f\colon X \to Y$ *verträgt sich* mit $\sim$, falls

$$\forall x, x' \in X : (x \sim x' \implies f(x) = f(x')).$$

(a) Definiere eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ durch

$$a \sim b :\iff \exists c \in \mathbb{Z} : (5c \leq a < 5(c+1) \,\&\, 5c \leq b < 5(c+1)) \qquad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Verträgt sich $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$ mit $\sim$?

(b) Definiere eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ durch

$$a \sim b :\iff a \in \{-b, b\} \qquad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Verträgt sich $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$ mit $\sim$?

(c) Es seien $A \subseteq B$ und C Mengen. Auf der Menge C^B definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$f \sim g \iff \forall x \in A : f(x) = g(x) \qquad (f, g \in C^B).$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Benutze den Homomorphiesatz für Mengen, um zu zeigen: Ist $C \neq \emptyset$, so existiert eine bijektive Abbildung $C^B/{\sim} \to C^A$. Wie ist die Situation für $C = \emptyset$?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 13. November 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.