Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (15 Punkte) Sei $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{49}\}$ mit $2 := 1+1 \in K$, $3 := 1+1+1 \in K$ und so weiter. Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & -2-i \\ 2 & 1-i & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1+i \\ i & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -1 & 2i \end{pmatrix} \in K^{3\times 8}.$$

(a) Berechne eine Matrix $B \in K^{3\times 8}$ in reduzierter Stufenform mit $A \sim B$ durch Anwendung von Zeilenoperationen (dabei sind sämtliche durchgeführten Zeilenoperationen wie in den Beispielen aus der Vorlesung anzuzeigen).

(b) Bestimme die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(*) \qquad Ax = 0 \qquad (x \in K^8).$$

Hinweis: Wenn folgendes nicht gilt, dann ist Deine Rechnung in (a) fehlerhaft:

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{3i}{2} \\ \frac{15}{2} - \frac{3i}{2} \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} 5+3i \\ 6+3i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_9 \\ \begin{pmatrix} 9+7i \\ 12+12i \\ 11+16i \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_{49} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

(a) Bringe A in reduzierte Stufenform.

(b) Bestimme eine Basis des Zeilenraums von A.

(c) Bestimmen eine Basis des Kerns von A.

Aufgabe 3: Es seien A und B zwei Matrizen über einem Körper K mit jeweils n Spalten. Zeige:

(a) $\ker(A) \subseteq \ker(B) \iff \mathrm{row}(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$

(b) $\ker(A) \subseteq \mathrm{row}(B) \iff \mathrm{row}(A) \supseteq \ker(B)$

(c) $\mathrm{row}(A) \subseteq \ker(B) \iff \ker(A) \supseteq \mathrm{row}(B)$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ [$\to$ 6.1.5] aller rationalen Folgen? Begründe deine Antworten!

(a) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \forall i, j \in \mathbb{N} : (i \leq j \implies a(i) \leq a(j))\}$

(b) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{Q} : \forall i \in \mathbb{N} : a(i) = q\}$

(c) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} : (i \geq n \implies s(i) = 0)\}$

(d) $\{a \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} : a(i) = qi\}$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist $(\mathbb{Z}, +)$ die additive Gruppe eines Vektorraums? Begründe Deine Antwort!

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 08. Januar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.