Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

---

# Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra I

---

**Aufgabe 1**: Sei $V$ ein Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $V = \operatorname{span}(v_1, ..., v_n)$. Zeige, dass $\{v_k \mid k \in \{1, \dots, n\}, v_k \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k-1})\}$ eine Basis von $V$ ist.

**Aufgabe 2**: Zeichne die Mengen

$$A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 0 \right\},$$

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}, \qquad D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y^2 = 1 \right\},$$

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 = 0 \right\}, \qquad F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 = 1 \right\},$$

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x - y)^2 = 0 \right\}, \qquad H := \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

Entscheide für jede dieser Mengen jeweils, ob sie

(a) eine Untergruppe der Gruppe $\mathbb{R}^2$ (mit komponentenweise Addition),

(b) ein Untervektorraum des Vektorraus $\mathbb{R}^2$,

(c) ein Ideal des Ringes $\mathbb{R}^2$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation),

(d) ein Unterring des Ringes $\mathbb{R}^2$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation)

ist. Ausnahmsweise müssen nur die negativen Antworten begründet werden und diese auch nur kurz und stichwortartig.

**Aufgabe 3**:

(a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$

(2) im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$

(3) im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$

linear unabhängig?

(b) Ist die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}$ linear unabhängig?

(c) Ist die Menge $\{\sum_{i=0}^{n} X^i \mid n \in \mathbb{P}\}$ im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2[X]$ linear unabhängig?

(d) Sind $1 + \mathring{i}X,\ \mathring{i}X^2 - X^3,\ \mathring{i} - X + 2X^2 + 2\mathring{i}X^3$ linear unabhängig im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[X]$?

(e) Ist die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

**Aufgabe 4**: Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Es seien $n$ Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben, die linear abhängig sind, obwohl je $n-1$ von diesen linear unabhängig sind (Beispiel?). Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.

(b) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie in (a) und $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = 0$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $\mu_1 = \lambda\lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda\lambda_n$.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeige: Es existiert höchstens eine Abbildung $*\colon \mathbb{Q} \times G \to G$ so, dass dass $(G, +)$ zusammen mit $*$ als Skalarmultiplikation zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 15. Januar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.