Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Sei U ein Unterraum des endlichen K-Vektorraums V und seinen $v, w \in V/U$.

(a) Zeige: v und w haben die gleiche Anzahl von Elementen, nämlich $\#U$ viele.

(b) Zeige $\#(V/U) = \frac{\#V}{\#U}$.

Aufgabe 2: Gib für folgende Beispiele eines K-Vektorraumes V und eines Unterraumes U explizit alle Elemente von V/U als Mengen an. Führe geeignete Bezeichnungen für die Elemente von V/U ein und gib explizit die Verknüpfungstabellen für die Addition und die Skalarmultiplikation von V/U an.

(a) $K = \mathbb{F}_2$, $V = \mathbb{F}_2^3$, $U = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $V = \mathbb{F}_3^2$, $U = \{(x, y) \in V \mid 2x = y\}$

(c) $K = \mathbb{F}_2$, $V = \mathbb{F}_2^{2\times 2}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}$

(d) Welche der drei in (a), (b) und (c) betrachteten Quotientenvektorräume V/U sind zu welchen anderen isomorph? Gib jeweils explizit einen Isomorphismus oder einen Grund an, warum es keinen gibt.

Aufgabe 3: Seien V und W K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Beweise Proposition 8.1.7:

(a) $\equiv_f$ ist eine Kongruenzrelation auf V,

(b) $\ker f$ ist ein Unterraum von V und

(c) $\operatorname{im} f$ ist ein Unterraum von W.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ eine $n \times n$-Matrix. Dann heißt A *symmetrisch*, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wir nennen A *faltbar*, wenn $a_{ij} = a_{i(n+1-j)}$ für alle $1 \le i, j \le n$. Sei K ein Körper. Mit $\begin{Bmatrix} SK^{n\times n} \\ FK^{n\times n} \end{Bmatrix}$ bezeichnen wir die Menge der $\begin{Bmatrix} \text{symmetrischen} \\ \text{faltbaren} \end{Bmatrix}$ $n \times n$-Matrizen über K. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Quotientenvektorräume $K^{n\times n}/SK^{n\times n}$ und $K^{n\times n}/FK^{n\times n}$ isomorph (und warum)?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 29. Januar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.