Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Markus Schweighofer
20. März 2018

Klausur zur Linearen Algebra I, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. (a) 3, 4
(b) 1,2
(c) 3
(d) 3
(e) 2, 3
(f) 1, 3, 4
(g) 3, 4

Aufgabe 3. (a) $p := 3$, $q := 2$, $a := 1$, $b := 0$, $c := 0$, $d := 2$
(b) $A := \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3$, $a := (1, 0)$, $b := (0, 1)$
(c) $a := 6$, $b := 2$, $c := 3$
(d) $\mathbb{F}_3$ (als $\mathbb{F}_3$-Vektorraum)
(e) $\mathbb{F}_2^2$
(f) $\mathbb{F}_9$
(g) $\mathbb{F}_9^\times$
(h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(i) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A := \begin{pmatrix} \mathring{i} & -1 & \mathring{i} & 1 \\ 1 & 1 & \mathring{i} & 0 \\ 1 - \mathring{i} & \mathring{i} & -1 - \mathring{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Unter Beachtung von $1+1=-1$ in $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\mathring{\imath}]$ erhält man

$$
\begin{aligned}
A &\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\sim} \begin{pmatrix} \mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} & 1 \\ 1 & 1 & \mathring{\imath} & 0 \\ 1 & \mathring{\imath}-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftarrow \mathring{\imath} Z_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -\mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} \\ 1 & 1 & \mathring{\imath} & 0 \\ 1 & \mathring{\imath}-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -\mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} \\ 0 & 1-\mathring{\imath} & \mathring{\imath}-1 & \mathring{\imath} \\ 0 & -1 & 1 & -1+\mathring{\imath} \end{pmatrix} \overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -\mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} \\ 0 & -\mathring{\imath} & \mathring{\imath} & -1-\mathring{\imath} \\ 0 & -1 & 1 & -1+\mathring{\imath} \end{pmatrix} \\
&\overset{Z_2 \leftarrow \mathring{\imath} Z_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -\mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} \\ 0 & 1 & -1 & -\mathring{\imath}+1 \\ 0 & -1 & 1 & -1+\mathring{\imath} \end{pmatrix} \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -\mathring{\imath} & -1 & \mathring{\imath} \\ 0 & 1 & -1 & -\mathring{\imath}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z_1 \leftarrow -Z_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & 1 & -\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & -1 & -\mathring{\imath}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftarrow Z_1 - \mathring{\imath} Z_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\mathring{\imath} & \mathring{\imath}-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daher ist die Lösungsmenge gleich

$$
\begin{aligned}
&\left\{ x \in \mathbb{F}_9^3 \;\middle|\; x_1 = \mathring{\imath} - 1 - (1+\mathring{\imath})x_3,\ x_2 = 1 - \mathring{\imath} + x_3, x_3 \in \mathbb{F}_9 \right\} \\
= &\left\{ \begin{pmatrix} (\mathring{\imath}-1) - (1+\mathring{\imath})x_3 \\ (1-\mathring{\imath}) + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{F}_9 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathring{\imath}-1 \\ 1-\mathring{\imath} \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \;\middle|\; \xi \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1-\mathring{\imath} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. Betrachte die aus der Vorlesung bekannte lineare Abbildung

$$E := E^{(3)}_{1,2,3,4} \colon \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}^4,\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

Sie ist injektiv, da laut Vorlesung ein Polynom vom Grad ≤ 3 mit 4 Nullstellen das Nullpolynom sein muss. Wegen $\dim \mathbb{R}[X]_3 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ ist sie damit auch surjektiv.

(a) Ist $f \in \mathbb{R}[X]_3$ mit $E(f) = 0$, so $f = 0$, da E injektiv ist. Also lautet die Antwort „nein“.

(b) Da E surjektiv ist, können wir $f \in \mathbb{R}[X]_3$ wählen mit $E(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt natürlich $f \neq 0$ und $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ (sogar $f(4) = 4$). Also lautet die Antwort „ja“.

(c) Betrachte die lineare Abbildung

$$F \colon \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}^4,\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ f'(1) \\ f(-1) \\ f'(-1) \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten, dass die Antwort „ja“ lautet, wozu es ausreicht zu zeigen, dass F surjektiv ist. Betrachte hierzu die Basis $\underline{v} := (1, X, X^2, X^3)$ von $\mathbb{R}[X]_3$ und die Standardbasis $\underline{e}$ von $\mathbb{R}^4$. Dann ist zu zeigen $\operatorname{rank} M(F, \underline{v}, \underline{e}) = 4$. Es gilt

$$M(F,\underline{v},\underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_2}{\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_4 \leftarrow -\frac{1}{4} Z_4}{\overset{Z_3 \leftarrow -\frac{1}{2} Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_3 - 2Z_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftrightarrow Z_4}{\overset{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix in Stufenform hat 4 Stufen ist und damit Rang 4, womit auch die dazu äquivalente Matrix $M(F, \underline{v}, \underline{e})$ Rang 4 hat.

Aufgabe 6. Betrachte den Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q},\ p \mapsto p(\sqrt{2}).$$

Da dies ein Ringhomomorphismus ist, ist sein Kern I ein Ideal von $\mathbb{Q}[X]$. Offensichtlich gilt $X^2 - 2 \in I$ und insbesondere $I \neq \{0\}$. Gemäß Vorlesung gibt es genau ein normiertes $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $I = (p)$. Offensichtlich kann p nicht den Grad 0 haben. Es kann auch nicht den Grad 1 haben, sonst würde $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ folgen. Also muss es den Grad 2 haben. Da $X^2 - 2$ ein Vielfaches von p in $\mathbb{Q}[X]$ ist und p normiert ist, folgt $p = X^2 - 2$ und damit $I = (X^2 - 2)$. Da der obige Einsetzungshomomorphismus surjektiv ist, liefert der Isomorphiesatz für kommutative Ringe einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \to \mathbb{Q},\ \overline{p}^I \mapsto p(\sqrt{2}).$$

Aufgabe 7. $\underline{n = 0}$ Das charakteristische Polynom der leeren Matrix (aus $K^{0\times 0}$) ist die Determinante der leeren Matrix (aus $K[X]^{0\times 0}$), welche $1 \in K[X]$ ist.

$\underline{n - 1 \to n \quad (n \in \mathbb{N})}$ Seien $a_1, \ldots, a_{2n} \in K$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_{2n} & & 0 \end{pmatrix}$. Dann

$$\chi_A = \det(A - XI_{2n}) \in K^{2n\times 2n} = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & a_1 \\ 0 & B - XI_{2(n-1)} & 0 \\ a_{2n} & 0 & -X \end{pmatrix},$$

wobei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_{2n-1} & & 0 \end{pmatrix} K^{2(n-1)\times 2(n-1)}$$

ein ganzer Block ist und die vier benachbarten Nullen jeweils für Nullblöcke geeigneter Ausmaße stehen (die Nullen links und rechts für Spaltenvektoren der Länge $2(n-1)$ und die Nullen oben und unten für Zeilenvektoren derselben Länge). Mittels $2(n-1)$ Zeilenvertauschungen kann man die Blockmatrix $\begin{pmatrix} -X & 0 & a_1 \\ 0 & B - XI_{2(n-1)} & 0 \\ a_{2n} & 0 & -X \end{pmatrix}$ in die Blockmatrix $\begin{pmatrix} -X & 0 & a_1 \\ a_{2n} & 0 & -X \\ 0 & B - XI_{2(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$ überführen und mittels weiterer $2(n-1)$ Spaltenvertauschungen in die Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} -X & a_1 & 0 \\ a_{2n} & -X & 0 \\ 0 & 0 & B - XI_{2(n-1)} \end{pmatrix}$. Dabei wird die Determinante nicht verändert, da es sich um eine gerade Anzahl von Zeilen- und Spaltenvertauschungen handelt. Wegen der Blockdiagonalform folgt:

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{pmatrix} -X & a_1 \\ a_{2n} & -X \end{pmatrix} \det(B - XI_{2(n-1)}) &= (X^2 - a_1 a_{2n}) \det(B - XI_{2(n-1)}) \\ &\overset{\text{IV}}{=} (X^2 - a_1 a_{2n}) \prod_{i=2}^{n} (X^2 - a_i a_{2n+1-i}) = \prod_{i=1}^{n} (X^2 - a_i a_{2n+1-i}). \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (a) Die beiden Elemente von V/U sind

$$0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad v := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Mit den Bezeichnungen aus (a) sind die Addition $+$ und die Skalarmultiplikation $\cdot$ von V/U gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & v \\ \hline 0 & 0 & v \\ v & v & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & v \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & v \end{array}.$$

(c) Setzt man $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so sind die Addition $+$ und die Skalarmultiplikation $\cdot$ von $U = \{0, u\}$ gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & u \\ \hline 0 & 0 & u \\ u & u & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & u \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u \end{array}.$$

Die Abbildung $U \to V/U,\ 0 \mapsto 0,\ u \mapsto v$ führt die Tabellen aus (b) über in die gerade angegebenen Tabellen und ist daher ein Isomorphismus der Vektorräume U und V/U.

Aufgabe 9. Setze

$$\begin{aligned} p &:= X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in K[X] \qquad \text{und} \\ q &:= X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in K[X]. \end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Determinante in der ersten Zeile gilt

$$\chi_A = \chi_{C_p} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-X \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir $\chi_{C_p} = (-1)^6 p = p$. Entwickelt man ferner die letzte Determinante nach der ersten Zeile, so erhält man, dass sie gleich

$$\det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1-X \end{pmatrix} = \chi_{C_q}$$

ist. Wieder aus der Vorlesung wissen wir $\chi_{C_q} = (-1)^5 q = -q$. Es folgt $\chi_A = p - q = X^6$.