Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 30. Oktober 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1\}$.
Welche der folgenden Mengen von Matrizen bilden mit der angegebenen Matrizenoperation eine Gruppe? Welche dieser Gruppen sind abelsch?

$$(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot), (\mathbb{R}^{n\times n}, +), (O_n, \cdot), (O_n, +), (X, +), (X, \cdot)$$

Dabei ist $O_n := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I_n\}$ die *orthogonale Gruppe.*

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe und seien $U_1, U_2, V \leq G$ mit $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeige:

$$V \subseteq U_1 \text{ oder } V \subseteq U_2.$$

Folgere hieraus, dass G nicht Vereinigung zweier echter Untergruppen von G sein kann.

Aufgabe 3

Seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U, V \leq G$. Schreibe $UV := \{u \cdot v \mid u \in U, v \in V\}$.

(a) Zeige: $UV \leq G \Leftrightarrow UV = VU$.
(b) Sei weiter $W \leq U$. Zeige das Modularitätsgesetz $W(U \cap V) = U \cap (WV)$.

Aufgabe 4

Sei G eine Menge und $\cdot \colon G \times G \to G$ eine (meist infix oder gar nicht notierte) Abbildung ist derart, daß $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in G$ gilt. Zeige, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist genau dann, wenn

$$\exists e \in G : ((\forall a \in G : ae = a) \;\&\; (\forall a \in G : \exists b \in G : ab = e)).$$

Aufgabe A

Es sei $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Menge mit sechs Elementen und einer Verknüpfung $\cdot \colon G \times G \to G$. Vervollständige die folgende Verknüpfungstafel unter der Annahme, dass G eine Gruppe ist:

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a					c	b
b		d	f			
c		e				
d				d		
e						
f		a			d	