Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 15. Januar 2018, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 34

Sei $p \in \mathbb{P}$.

(a) Zeige, dass es genau einen Automorphismus ψ von $\mathbb{Q}(X)$ gibt mit $\psi(X) = X+1$.
(b) Zeige $\psi(\mathbb{Q}[X]) = \mathbb{Q}[X]$ und $\psi(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Z}[X]$.
(c) Zeige, dass $\Phi_p := \frac{X^p-1}{X-1} \in \mathbb{Q}(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ liegt.
(d) Gib explizit die Koeffizienten von $\psi(\Phi_p) \in \mathbb{Z}[X]$ an.
(e) Berechne für $k \in \{0, \dots, p\}$ die p-Bewertung des Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$.
(f) Zeige mit dem Kriterium von Eisenstein, dass $\psi(\Phi_p)$ sowohl in $\mathbb{Z}[X]$ als auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
(g) Folgere, dass Φ_p sowohl in $\mathbb{Z}[X]$ als auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 35

Zeige mit Hilfe der folgenden Teilaufgaben, dass $f := X^4 + 1$ zwar in $\mathbb{Q}[X]$ aber in keinem $\mathbb{F}_p[X]$ mit $p \in \mathbb{P}$ (und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$) irreduzibel ist.

(a) f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$,
(b) Gibt es ein $a \in \mathbb{F}_p$ mit $a^2 = -1$, so ist f reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$,
(c) Gibt es ein $a \in \mathbb{F}_p$ mit $a^2 = 2$, so ist f reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$,
(d) Gibt es ein $a \in \mathbb{F}_p$ mit $a^2 = -2$, so ist f reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$,
(e) Für jede Primzahl p ist mindestens eines der Elemente $-1, 2, -2$ von $\mathbb{F}_p$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.

Hinweis: Betrachte die Quotientengruppe $\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2$ der Einheitengruppe $\mathbb{F}_p^\times$ nach $(\mathbb{F}_p^\times)^2 := \{a^2 \mid a \in \mathbb{F}_p^\times\}$. Zeige, dass sie höchstens zwei Elemente hat, indem Du den Epimorphismus von $\mathbb{F}_p^\times \to (\mathbb{F}_p^\times)^2,\ a \mapsto a^2$ betrachtest.

Aufgabe 36

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige:

(a) Ist $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist A/I noethersch.
(b) Ist $S \subseteq A$ multiplikativ, so ist A_S noethersch.

Aufgabe 37

Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung < 60 auflösbar ist.
Hinweis: Die Aussage von Aufgabe K kann ohne Beweis verwendet werden.