Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 13 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 5. Februar 2018, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 44

Sei G eine Gruppe und seien a und b Elemente endlicher Ordnung in G mit $ab = ba$. Gelte $1 \in (\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b)_{\mathbb{Z}}$. Zeige: $\operatorname{ord}(ab) = (\operatorname{ord} a)(\operatorname{ord} b)$.

Aufgabe 45

Sei K ein Körper und G eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times$ von K.

(a) Schreibe $d := \#G = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ mit $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachte

$$e_i := \frac{d}{p_i}.$$

Zeige, dass es ein $a_i \in G$ gibt mit $a_i^{e_i} \neq 1$ indem Du ein geeignetes Polynom über K betrachtest.

(b) Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachte

$$f_i := \frac{d}{p_i^{\alpha_i}}.$$

Zeige, dass $b_i := a_i^{f_i}$ in der Gruppe G die Ordnung $p_i^{\alpha_i}$ hat.

(c) Zeige, dass die Gruppe G von $b := b_1 \cdots b_n$ erzeugt wird. Die Gruppe G ist also zyklisch.

Aufgabe 46

(a) Welche der folgenden Körper sind normal über $\mathbb{Q}$? Welche sind separabel?

  (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{10 + \sqrt{2}})$

  (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{7}})$

(b) Gibt es Körpererweiterungen, welche normal, aber nicht separabel sind?

Aufgabe 47

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0, 1\} \subseteq M$ und $K := \mathbb{Q}(M \cup M^*)$, wobei

$$M^* := \{z^* \mid z \in M\}$$

das Bild von M unter der komplexen Konjugation $z \mapsto z^*$ ist.

Zeige:

(a) Der Körper $\curlywedge M$ von Blatt 12 ist *quadratisch abgeschlossen*, das heißt für $a \in \curlywedge M$ ist auch $\sqrt{a} \in \curlywedge M$.
Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $a > 0$ und benutze dort den Höhensatz.

(b) Ist $a \in M'$, also durch einen der elementaren Konstruktionsschritte $(\times)$, $(\varnothing)$ oder (⚭) aus M konstruierbar, so ist $[K(a) : K] \leq 2$.
Hinweis: Nehme bei (⚭) zunächst an, dass die beiden Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen und führe es dann auf $(\varnothing)$ zurück.

Aufgabe N

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und sei L der Zerfällungskörper von f über K.

(a) Zeige, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.
(b) Zeige: Ist $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel.
(c) Gilt auch die Umkehrung von (b)?
(d) Finde ein Beispiel für $[L : K] = n!$ mit $n \geq 3$
(e) Finde ein Beispiel für $3 \leq n < [L : K] < n!$.