Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 14 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 12. Februar 2018, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 49

Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$, $mk = n$, $L := \mathbb{F}_{p^n}$ und $K := \mathbb{F}_{p^m}$.

(a) Begründe, warum die Körpererweiterung $L|K$ galoissch ist.
(b) Die m-fache Iteration Φ_L^m des Frobenius-Automorphismus Φ_L ist ein Automorphismus der Körpererweiterung $L|K$.
(c) $[L : K] = k$
(d) $\#\mathrm{Aut}(L|K) = k$
(e) Φ_L^m erzeugt die Automorphismengruppe von $L|K$.
(f) $\mathrm{Aut}(L|K) \cong C_k$

Aufgabe 50

Sei K ein Körper und ζ ein Element der endlichen Ordnung n in der multiplikativen Gruppe $K^\times$ von K (eine sogenannte *primitive n-te Einheitswurzel*). Sei $a \in K^\times$ und $x \in \overline{K}$ eine Nullstelle von $f := X^n - a$. Setze $L := K(x)$. Zeige:

(a) Die von ζ erzeugte Untergruppe $\langle \zeta \rangle$ von $K^\times$ ist isomorph zu C_n und besteht genau aus den Nullstellen von $X^n - 1$.
(b) $L|K$ ist eine Galoiserweiterung.
(c) Für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(L|K)$ ist $\sigma(x)$ eine Nullstelle von f.
(d) Die Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Aut}(L|K) \to \langle \zeta \rangle,\ \sigma \mapsto \frac{\sigma(x)}{x}$ ist eine Gruppeneinbettung.
(e) $\mathrm{Aut}(L|K)$ ist zyklisch.

Aufgabe 51

(a) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Zeige

$$[L : K] \leq 2 \Leftrightarrow \exists a \in K : L = K(\sqrt{a}).$$

Hinweis: Mache eine „quadratische Ergänzung“.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0,1\} \subseteq M$, $K := \mathbb{Q}(M \cup M^*)$ wie auf dem letzten Blatt und $a \in \mathbb{C}$. Zeige $a \in \curlywedge M$ genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}_0$ und Zwischenkörper $F_0, \ldots, F_n$ von $\mathbb{C}|K$ mit $K = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ gibt mit $a \in F_n$ und $[F_k : F_{k-1}] = 2$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Hinweis: Zeige, um leichter Induktion durchführen zu können, dass sogar $F_n^* = F_n$ gewählt werden kann.

(c) Zeige, dass das regelmäßige 7-Eck nicht aus $M = \{0, 1\}$ konstruierbar ist.

Hinweis: Bestimme den Grad des Minimalpolynoms von $e^{\frac{2\pi \mathring{\imath}}{7}}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 52

Sei L der Zerfällungskörper von

(a) $X^4 - 20X^2 + 98 \in \mathbb{Q}[X]$
(b) $X^4 - 8X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$

über $\mathbb{Q}$. Bestimme ein primitives Element von $L|\mathbb{Q}$, die Galoisgruppe $\operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$ und alle Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$.

Aufgabe O

Sei $p \in \mathbb{P}$, L der Zerfällungskörper von $f := X^p - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$, $\zeta := e^{\frac{2\pi \mathring{\imath}}{p}} \in \mathbb{C}$ und $G := \operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$.

(a) Zeige, dass f in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(b) Zeige $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{2})$.

(c) Zeige $[L : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

(d) Betrachte die additive Gruppe $\mathbb{Z}/\langle p\rangle$ und die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ des Körpers $\mathbb{F}_p$. Zeige, dass
$$\varphi\colon \mathbb{F}_p^\times \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/\langle p\rangle),\ a \mapsto (b \mapsto ab)$$
ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist.

(e) Zeige, dass die Abbildung
$$G \to \mathbb{Z}/\langle p\rangle \rtimes_\varphi \mathbb{F}_p^\times$$
$$\sigma \mapsto (\overline{k}^{\langle p\rangle}, \overline{\ell}^{(p)}) \text{ falls } k, \ell \in \mathbb{Z} \text{ mit } \sigma(\sqrt[p]{2}) = \zeta^k \sqrt[p]{2} \text{ und } \sigma(\zeta) = \zeta^\ell$$
ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist.