
Übungsblatt 3 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 13. November 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 9

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $H \triangleleft G$,
- (b) $H \sim = \sim_H$,
- (c) $\forall a \in G: Ha = aH$,
- (d) $\forall a \in G: aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\} = H$,
- (e) $\forall a \in G: aHa^{-1} \subseteq H$,
- (f) $H \sim$ ist eine Kongruenzrelation,
- (g) \sim_H ist eine Kongruenzrelation,
- (h) H ist Kern eines Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 10

- (a) Sei G eine Gruppe, $H \leq G$, $N \triangleleft G$. Zeige $N \triangleleft HN$ und $(H \cap N) \triangleleft H$.
- (b) Zeige

$$H / (H \cap N) \cong HN / N.$$

- (c) Seien G_1, G_2 Gruppen und $N_1 \triangleleft G_1, N_2 \triangleleft G_2$. Zeige $N_1 \times N_2 \triangleleft G_1 \times G_2$.
- (d) Zeige

$$(G_1 \times G_2) / (N_1 \times N_2) \cong G_1 / N_1 \times G_2 / N_2.$$

Aufgabe 11

Welche der folgenden Aussagen sind für jede Gruppe G , jeden Homomorphismus $f: G \rightarrow G$ und jeden Normalteiler N von G richtig (jeweils Begründung oder Gegenbeispiel)?

- (a) $f(N) \triangleleft G$,
- (b) $f^{-1}(N) \triangleleft G$.

Aufgabe 12

Zeige:

- (a) $V_4 := \{1, \tau_{12}\tau_{34}, \tau_{13}\tau_{24}, \tau_{14}\tau_{23}\} \leq S_4$
- (b) $V_4 \triangleleft S_4$,
- (c) $V_4 \triangleleft A_4$,
- (d) Jede zweielementige Untergruppe von V_4 ist ein Normalteiler von V_4 ,
- (e) Die Normalteilerbeziehung ist nicht transitiv.

Aufgabe C (Charakteristische Untergruppe)

Sei G eine Gruppe.

- (a) Zeige, dass $H \leq G$ eine charakteristische Untergruppe von G ist, wenn $\varphi(H) \subseteq H$ gilt für alle $\varphi \in \text{Aut}(G)$.
- (b) Sei $K \triangleleft H \triangleleft G$. Im Allgemeinen ist $K \not\triangleleft G$ (Aufgabe 11). Zeige, dass aber $K \triangleleft G$ gilt, wenn K eine charakteristische Untergruppe von H ist.