Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 20. November 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 13

(a) Zeige, dass jede endliche Gruppe gerader Ordnung ein Element der Ordnung 2 besitzt.

(b) Seien G, H Gruppen, $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus und a ein Element endlicher Ordnung in G. Zeige, dass dann $\varphi(a)$ in H eine endliche Ordnung hat, die die Ordnung von a in G teilt.

(c) Sei H eine Gruppe ungerader Ordnung und $\varphi\colon S_n \to H$ ein Homomorphismus. Zeige, dass φ trivial ist.

Aufgabe 14

Seien N, H Gruppen und $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus.

(a) Zeige, dass $N \times H$ vermöge

$$(a,b)(a',b') := (a\varphi(b)(a'), bb') \qquad (a, a' \in N, b, b' \in H)$$

zu einer eine Gruppe $N \rtimes_\varphi H$ wird.

(b) Zeige, dass die Abbildungen

$$N \to N \rtimes_\varphi H, a \mapsto (a,1) \quad \text{und} \quad H \to N \rtimes_\varphi H, b \mapsto (1,b)$$

Einbettungen sind.

(c) Zeige $N \times \{1\} \lhd N \rtimes_\varphi H$, $\{1\} \times H \leq N \rtimes_\varphi H$,

$$N \rtimes_\varphi H = (N \times \{1\}) \rtimes (\{1\} \times H)$$

und

$$(1,b)(a,1)(1,b)^{-1} = (\varphi(b)(a), 1)$$

für alle $a \in N$ und $b \in H$.

Aufgabe 15

Sei G eine Gruppe, $N \leq G$, $H \leq G$ und $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $N \lhd G \;\&\; G = N \rtimes H \;\&\; \forall\, b \in H\colon \varphi(b) = c_b$

(b) $N \rtimes_\varphi H \to G, (a,b) \mapsto ab$ ist ein Isomorphismus.

Hierbei bezeichnet $c_b \in \mathrm{Aut}(N)$ die Konjugation mit b.

Aufgabe 16

Sei G eine Gruppe, $H, I \leq G$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $HI = G \;\&\; H \cap I = \{1\} \;\&\; \forall\, a \in H : \forall\, b \in I\colon ab = ba$,

(b) $HI = G \;\&\; H \cap I = \{1\} \;\&\; H \lhd G \;\&\; I \lhd G$,

(c) $H \times I \overset{\cong}{\to} G,\ (a,b) \mapsto ab$

Aufgabe D

Bezeichne V_4 die Untergruppe von S_4 aus Aufgabe 11. Zeige

$$ {}^{S_4}\!/_{V_4} \cong S_3. $$

Hinweis: Betrachte hierzu S_4 als Menge aller Kongruenzabbildungen eines regulären Tetraeders mit Eckpunkten nummeriert durch $1, 2, 3, 4$. Wie kann man die Abbildungen aus V_4 geometrisch interpretieren? Finde hiermit eine Homomorphismus $S_4 \to S_3$ mit V_4 als Kern.