Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 11. Dezember 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 22

Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ. Sei B ein weiterer kommutativer Ring und $\varphi\colon A \to B$ ein Homomorphismus mit $\varphi(S) \subseteq B^\times$. Zeige, dass es genau einen Homomorphismus $\psi\colon A_S \to B$ gibt mit $\varphi = \psi \circ \iota_S$, wobei $\iota_S\colon A \to A_S, a \mapsto \bar{a}$ die kanonische Abbildung von A in die Lokalisierung A_S ist.

Aufgabe 23

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Epimorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B. Zeige: Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} I &\mapsto \varphi(I) \\ \varphi^{-1}(J) &\leftarrow\!\shortmid J \end{aligned}$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge der $\left\{\begin{matrix}\text{Ideale}\\ \text{Primideale}\\ \text{maximalen Ideale}\end{matrix}\right\}$ I von A mit $\ker\varphi \subseteq I$ und der Menge $\left\{\begin{matrix}\text{Ideale}\\ \text{Primideale}\\ \text{maximalen Ideale}\end{matrix}\right\}$ von B.

Aufgabe 24

Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ. Zeige: Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\mapsto \overline{S}^{-1}\iota_S(\mathfrak{p}) := \left\{\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in S\right\} \\ \iota_S^{-1}(\mathfrak{q}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q} \end{aligned}$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ und der Menge der Primideale von A_S.

Aufgabe 25

Finde jeweils ein *möglichst kreatives* Beispiel für

(a) einen kommutativen Ring mit einem Element, das irreduzibel aber nicht prim ist,
(b) einen kommutativen Ring mit einem Element $\neq 0$, das prim aber nicht irreduzibel ist,
(c) einen faktoriellen Ring mit genau zwei primen Hauptidealen.

Aufgabe G

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Zeige, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

  (i) R besitzt genau ein maximales Ideal.

  (ii) $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal von R.

(b) Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Sei $S := R \setminus \mathfrak{p}$.Zeige, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ die Eigenschaften aus (a) erfüllt.