Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 18. Dezember 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 26

Sei R ein faktorieller Ring und $K := \operatorname{qf}(R)$. Weiter sei $\mathbb{Z}^{(\mathbb{P}_R)}$ die Menge aller Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{P}_R \to \mathbb{Z}$ mit endlichem Träger $\operatorname{supp}(\alpha) := \{p \in \mathbb{P}_R \mid \alpha(p) \neq 0\}$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}_R)}$ setze

$$\mathbb{P}_R^\alpha := \prod_{p \in \operatorname{supp}(\alpha)} p^{\alpha(p)} \in K^\times.$$

Zeige:

(a) Es gibt zu jedem $a \in K^\times$ genau ein $(c_a, \alpha_a) \in R^\times \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}_R)}$ mit $a = c_a \mathbb{P}_R^{\alpha_a}$.

(b) Für jedes $p \in \mathbb{P}_R$ ist die Abbildung

$$v_p\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad a \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } a = 0 \\ \alpha_a(p) & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$$

eine diskrete Bewertung auf K.

Aufgabe 27

Sei K ein Körper, v eine diskrete Bewertung auf K und $\mathcal{O}_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$. Zeige: $\mathcal{O}_v$ ist ein Unterring von K mit Einheitengruppe $\mathcal{O}_v^\times = \{a \in K \mid v(a) = 0\}$. Weiter ist $\mathfrak{m}_v := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ das einzige maximale Ideal von $\mathcal{O}_v$.

Aufgabe 28

Sei K ein Körper und v eine diskrete Bewertung auf K. Zeige: Es gibt genau diskrete Bewertung w auf $K(X)$ mit

$$w\left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right) = \min\{v(a_i) \mid i \in \{0, \dots, d\}\}$$

für alle $d \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_d \in K$.

Aufgabe 29

Zeige, dass folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind. Welche davon sind auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$?

(a) $X^2 - 2X + 2$

(b) $3X^2 - 9X - 27$

(c) $X^4 - 6X^3 + 12X - 3X + 9$

Aufgabe H

Finde alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{F}_2[X]$. *Hinweis:* Es gibt acht.