§11 Vektorräume mit Skalarprodukt

§11.1 Skalarprodukte

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ist $a \in \mathbb{K}$, so schreiben wir wieder a^* für die komplex-konjugierte Zahl (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt natürlich $a^* = a$).

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ist $a \in \mathbb{K}$, so schreiben wir wieder a^* für die komplex-konjugierte Zahl (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt natürlich $a^* = a$).

Allgemeiner schreiben wir A^* für die komplex-konjugierte transponierte Matrix $(a_{ij}^*)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt natürlich $A^* = A^T$).

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ist $a \in \mathbb{K}$, so schreiben wir wieder a^* für die komplex-konjugierte Zahl (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt natürlich $a^* = a$).

Allgemeiner schreiben wir A^* für die komplex-konjugierte transponierte Matrix $(a_{ij}^*)_{1 \le j \le n, 1 \le i \le m} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt natürlich $A^* = A^T$).

Zum Beispiel gilt

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\mathring{\imath} & 0 & 1 \\ 0 & -\mathring{\imath} & 2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 - 2\mathring{\imath} & 0 \\ 0 & \mathring{\imath} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{K},\ (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ derart, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \langle u + v, w \rangle & = & \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\
(2) & \langle \lambda v, w \rangle & = & \lambda^* \langle v, w \rangle \\
(3) & \langle u, v + w \rangle & = & \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \\
(4) & \langle v, \lambda w \rangle & = & \lambda \langle v, w \rangle \\
(5) & \langle v, w \rangle & = & \langle w, v \rangle^* \\
(6) & v \neq 0 & \Longrightarrow & \langle v, v \rangle > 0
\end{array}
$$

Bemerkung

(a) Sei V ein K-VR und $V \times V \to \mathbb{K}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ eine Abbildung, die (4),(5) erfüllt. Dann gilt $\langle v, 0 \rangle = \langle v, 0_{\mathbb{K}} \cdot 0 \rangle = 0_{\mathbb{K}} \langle v, 0 \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ und daher $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle^* = 0_{\mathbb{K}}^* = 0_{\mathbb{K}}$. Beachte auch, dass gilt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Es ist dann (6) äquivalent dazu, dass für alle $v \in V$ gilt

$$(6') \qquad \langle v, v \rangle \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (\langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0).$$

Bemerkung

(a) Sei V ein K-VR und $V \times V \to \mathbb{K}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ eine Abbildung, die (4),(5) erfüllt. Dann gilt $\langle v, 0 \rangle = \langle v, 0_{\mathbb{K}} \cdot 0 \rangle = 0_{\mathbb{K}} \langle v, 0 \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ und daher $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle^* = 0_{\mathbb{K}}^* = 0_{\mathbb{K}}$. Beachte auch, dass gilt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Es ist dann (6) äquivalent dazu, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\text{(6')} \qquad \langle v, v \rangle \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (\langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0).$$

(b) Manche Autoren fordern in der Definition eines Skalarprodukts auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum die Linearität im ersten und die Semilinearität im zweiten Argument.

Beispiel

(a) $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = x^* y \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, wobei (6) folgt aus $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ [→4.2.8].

Beispiel

(a) $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ definiert durch

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = x^* y \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, wobei (6) folgt aus $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ [$\to$4.2.8].

(b) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ definiert durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 26x_2y_2 \quad \text{für } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, denn
$x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2 = (x_1 + 5x_2)^2 + x_2^2 > 0$ für $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Beispiel

(c) Es ist $C([0,1],\mathbb{K}) := \{f \mid f\colon [0,1] \to \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-VRs $\mathbb{K}^{[0,1]}$ [$\to$7.1.5] und

$$C([0,1],\mathbb{K})\times C([0,1],\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)^* g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf $C([0,1],\mathbb{K})$, denn

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f(x)^* f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx > 0,$$

falls $f \in C([0,1],\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Norm auf V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|$ derart, dass für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$
\begin{array}{rcll}
\|v+w\| & \leq & \|v\| + \|w\| & \text{„Dreiecksungleichung“} \\
\|\lambda v\| & = & |\lambda|\|v\| & \text{„absolute Homogenität“} \\
v \neq 0 & \Longrightarrow & \|v\| > 0 & [\text{beachte auch } \|0\| = \|0_{\mathbb{K}} 0\| = |0_{\mathbb{K}}|\|0\| = 0_{\mathbb{K}}]
\end{array}
$$

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Norm auf V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|$ derart, dass für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$
\begin{array}{rcll}
\|v + w\| & \leq & \|v\| + \|w\| & \text{„Dreiecksungleichung“} \\
\|\lambda v\| & = & |\lambda| \|v\| & \text{„absolute Homogenität“} \\
v \neq 0 & \Longrightarrow & \|v\| > 0 & [\text{beachte auch } \|0\| = \|0_{\mathbb{K}} 0\| = |0_{\mathbb{K}}| \|0\| = 0_{\mathbb{K}}]
\end{array}
$$

Definition

Einen ($\mathbb{K}$-)VR zusammen mit einem Skalarprodukt oder einer Norm auf V nennt man einen ($\mathbb{K}$-)VR mit Skalarprodukt beziehungsweise einen normierten ($\mathbb{K}$-)VR.

Bemerkung

(a) Einen $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt nennt man einen $\mathbb{K}$-Prähilbertraum, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch einen euklidischen Raum und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch einen unitären Raum. Altmodische Autoren sprechen jedoch sowohl im reellen als auch im komplexen Fall von einem unitären Raum, während neumodische Autoren in beiden Fällen von einem euklidischen Raum sprechen.

Bemerkung

(a) Einen $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt nennt man einen $\mathbb{K}$-Prähilbertraum, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch einen euklidischen Raum und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch einen unitären Raum. Altmodische Autoren sprechen jedoch sowohl im reellen als auch im komplexen Fall von einem unitären Raum, während neumodische Autoren in beiden Fällen von einem euklidischen Raum sprechen.

(b) Formal sind Vektorräume mit Skalarprodukt und normierte Räume bei uns 7-Tupel, da Vektorräume 6-Tupel sind [$\rightarrow$6.1.1]. So wie wir in einer abelschen Gruppe die Addition fast immer mit $+$ notieren [$\rightarrow$2.1.2(d)], schreiben wir das Skalarprodukt in einem VR mit Skalarprodukt fast immer mit $\langle ., . \rangle$ und die Norm in einem normierten VR fast immer mit $\|.\|$.

Lemma

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann

$$\langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \langle w, w\rangle.$$

Beweis.

$\langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v + w\rangle + \langle w, v + w\rangle =$
$\langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle =$
$\langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle v, w\rangle^* + \langle w, w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \langle w, w\rangle$
[→4.2.8] □

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt
$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Wähle $\zeta \in S$ mit $\operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) = |\langle v, w\rangle|$

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Wähle $\zeta \in S$ mit $\operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) = |\langle v, w\rangle|$ (nehme $\zeta := \frac{\langle v,w\rangle^*}{|\langle v,w\rangle|} \in S$ falls $\langle v, w\rangle \neq 0$).

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Wähle $\zeta \in S$ mit $\operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) = |\langle v, w\rangle|$ (nehme $\zeta := \frac{\langle v,w\rangle^*}{|\langle v,w\rangle|} \in S$ falls $\langle v, w\rangle \neq 0$). Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x|\langle v, w\rangle| + x^2\langle w, w\rangle.$$

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Wähle $\zeta \in S$ mit $\operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) = |\langle v, w\rangle|$ (nehme $\zeta := \frac{\langle v,w\rangle^*}{|\langle v,w\rangle|} \in S$ falls $\langle v, w\rangle \neq 0$). Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x|\langle v, w\rangle| + x^2\langle w, w\rangle.$$

Ist $\langle w, w\rangle = 0$, so gilt also $\langle v, w\rangle = 0$ und $w = 0$ ist linear abhängig.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien V ein VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

Bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V und setze $S := \{\zeta \in \mathbb{K} \mid |\zeta| = 1\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ nach dem Lemma

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x \operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) + x^2\langle w, w\rangle.$$

Wähle $\zeta \in S$ mit $\operatorname{Re}(\zeta\langle v, w\rangle) = |\langle v, w\rangle|$ (nehme $\zeta := \frac{\langle v,w\rangle^*}{|\langle v,w\rangle|} \in S$ falls $\langle v, w\rangle \neq 0$). Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle v + x\zeta w, v + x\zeta w\rangle = \langle v, v\rangle + 2x|\langle v, w\rangle| + x^2\langle w, w\rangle.$$

Ist $\langle w, w\rangle = 0$, so gilt also $\langle v, w\rangle = 0$ und $w = 0$ ist linear abhängig. Sei also $\langle w, w\rangle > 0\ldots$ $\square$

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Dann ist

$$V \to \mathbb{R}, \ v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V. Jeder VR mit Skalarprodukt ist also auf diese Weise ein normierter Raum.

Satz
Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Dann ist

$$V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

eine Norm auf V. Jeder VR mit Skalarprodukt ist also auf diese Weise ein normierter Raum.

Beweis.
Es ist alles klar bis auf die Dreiecksungleichung: Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + 2\operatorname{Re}(\langle v, w\rangle) + \langle w, w\rangle \\
&\overset{4.2.8}{\leq} \langle v, v\rangle + 2|\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle \\
&\leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz (Polarisationsformel)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$
\begin{aligned}
4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und} \\
4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathring{i}\|v+\mathring{i}w\|^2 + \mathring{i}\|v-\mathring{i}w\|^2 \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Satz (Polarisationsformel)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} 4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \textit{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \textit{ und} \\ 4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathring{i}\|v+\mathring{i}w\|^2 + \mathring{i}\|v-\mathring{i}w\|^2 \textit{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis.

Es gilt $\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle = 2(\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle)$ für alle $v, w \in V$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, folgt hieraus schon die Behauptung.

Satz (Polarisationsformel)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} 4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und} \\ 4\langle v, w\rangle &= \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathring{\imath}\|v+\mathring{\imath}w\|^2 + \mathring{\imath}\|v-\mathring{\imath}w\|^2 \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis.

Es gilt $\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle = 2(\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle)$ für alle $v, w \in V$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, folgt hieraus schon die Behauptung. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt hieraus $-\mathring{\imath}(\langle v+\mathring{\imath}w, v+\mathring{\imath}w\rangle - \langle v-\mathring{\imath}w, v-\mathring{\imath}w\rangle) = -2\mathring{\imath}(\langle v, \mathring{\imath}w\rangle + \langle \mathring{\imath}w, v\rangle) = 2(\langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle)$ für alle $v, w \in V$ und man braucht dies nur zur obigen Gleichung addieren. $\square$

Definition und Proposition

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ und

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Diese Zahl nennt man den Winkel $\measuredangle(v, w)$ zwischen v und w.

Definition und Proposition

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ und

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Diese Zahl nennt man den Winkel $\measuredangle(v, w)$ zwischen v und w.

Beweis.

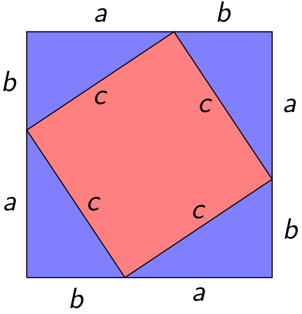
Aus der Analysis weiß man, dass $[0, \pi] \to [-1, 1],\ \alpha \mapsto \cos(\alpha)$ bijektiv ist. Aus der Injektivität dieser Funktion folgt die Eindeutigkeit von α. Aus der Surjektivität folgt die Existenz von α, denn nach Cauchy-Schwarz gilt

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1.$$

$\square$

Bemerkung

(a) Die durch das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ induzierte Norm $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \binom{a}{b} \mapsto \sqrt{a^2+b^2}$ gibt gerade die anschauliche Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ wieder, wie man leicht sieht, indem man in folgender Zeichnung den Flächeninhalt des großen Quadrats auf zwei verschiedene Weisen berechnet:



$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$. Wie in (a) argumentieren wir wieder anschaulich: Wegen (a) verändert die Drehung R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) die Norm eines Vektors nicht, woraus mit der Polarisationsformel folgt, dass R_φ auch das Skalarprodukt und damit Winkel im Sinne von unserer Definition nicht verändert.

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$. Wie in (a) argumentieren wir wieder anschaulich: Wegen (a) verändert die Drehung R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) die Norm eines Vektors nicht, woraus mit der Polarisationsformel folgt, dass R_φ auch das Skalarprodukt und damit Winkel im Sinne von unserer Definition nicht verändert. Es reicht also $\measuredangle(v, w)$ für den Fall zu betrachten, dass v auf der Halbachse $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ und $w \neq 0$ in der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt (sonst drehe geeignet).

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$. Wie in (a) argumentieren wir wieder anschaulich: Wegen (a) verändert die Drehung R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) die Norm eines Vektors nicht, woraus mit der Polarisationsformel folgt, dass R_φ auch das Skalarprodukt und damit Winkel im Sinne von unserer Definition nicht verändert. Es reicht also $\measuredangle(v, w)$ für den Fall zu betrachten, dass v auf der Halbachse $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ und $w \neq 0$ in der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt (sonst drehe geeignet). Weiter kann man $\|v\| = \|w\| = 1$ annehmen, also $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{smallmatrix}\right)$ mit $\beta \in [0, \pi]$.

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$. Wie in (a) argumentieren wir wieder anschaulich: Wegen (a) verändert die Drehung R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) die Norm eines Vektors nicht, woraus mit der Polarisationsformel folgt, dass R_φ auch das Skalarprodukt und damit Winkel im Sinne von unserer Definition nicht verändert. Es reicht also $\measuredangle(v, w)$ für den Fall zu betrachten, dass v auf der Halbachse $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ und $w \neq 0$ in der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt (sonst drehe geeignet). Weiter kann man $\|v\| = \|w\| = 1$ annehmen, also $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{smallmatrix}\right)$ mit $\beta \in [0, \pi]$. Dann gilt für $\alpha := \measuredangle(v, w)$, dass $\cos\alpha = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{smallmatrix}\right) \rangle = \cos\beta$.

Bemerkung

(b) Unsere Definition von Winkeln stimmt überein mit dem anschaulichen Winkelbegriff im $\mathbb{R}^2$. Wie in (a) argumentieren wir wieder anschaulich: Wegen (a) verändert die Drehung R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) die Norm eines Vektors nicht, woraus mit der Polarisationsformel folgt, dass R_φ auch das Skalarprodukt und damit Winkel im Sinne von unserer Definition nicht verändert. Es reicht also $\measuredangle(v, w)$ für den Fall zu betrachten, dass v auf der Halbachse $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ und $w \neq 0$ in der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt (sonst drehe geeignet). Weiter kann man $\|v\| = \|w\| = 1$ annehmen, also $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{smallmatrix}\right)$ mit $\beta \in [0, \pi]$. Dann gilt für $\alpha := \measuredangle(v, w)$, dass $\cos\alpha = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{smallmatrix}\right) \rangle = \cos\beta$. Also gilt $\alpha = \beta$, das heißt α ist der anschauliche Winkel zwischen v und w.

Bemerkung

(c) Die durch das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ induzierte Norm $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ gibt gerade die anschauliche Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ wieder,

Bemerkung

(c) Die durch das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ induzierte Norm $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ gibt gerade die anschauliche Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ wieder, denn nach Pythagoras aus Teil (a) ist die Länge von $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$ und wieder nach Pythagoras ist die Länge von $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ daher $\sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (male ein Bild!).

Bemerkung

(d) Durch Drehung im $\mathbb{R}^3$ sieht man nun wie in (b), dass auch im $\mathbb{R}^3$ der von uns eingeführte Winkelbegriff mit dem üblichen übereinstimmt.

Bemerkung

(e) Sind $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, so gilt im $\mathbb{C}^n$

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 + \mathring{\imath} b_1 \\ \vdots \\ a_n + \mathring{\imath} b_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a_1 - \mathring{\imath} b_1)(a_1 + \mathring{\imath} b_1) + \dots + (a_n - \mathring{\imath} b_n)(a_n + \mathring{\imath} b_n)}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2}.$$