§11.2 Orthogonalität

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.

Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander
(in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander
(in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Bemerkung

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann
$v \perp w \iff \measuredangle(v, w) = \frac{\pi}{2}$ nach der Definition von Winkeln 11.1.11,
denn $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander
(in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Bemerkung

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann
$v \perp w \iff \measuredangle(v, w) = \frac{\pi}{2}$ nach der Definition von Winkeln 11.1.11,
denn $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
Insbesondere stimmt unsere Definition von Senkrechtstehen in $\mathbb{R}^2$ und
$\mathbb{R}^3$ nach 11.1.12 mit unserer geometrischen Anschauung überein.

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander
(in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Bemerkung

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann
$v \perp w \iff \measuredangle(v, w) = \frac{\pi}{2}$ nach der Definition von Winkeln 11.1.11,
denn $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
Insbesondere stimmt unsere Definition von Senkrechtstehen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nach 11.1.12 mit unserer geometrischen Anschauung überein.

Satz (Satz von Pythagoras)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und seien $v, w \in V$ mit $v \perp w$.
Dann $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander
(in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Bemerkung

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann
$v \perp w \iff \measuredangle(v, w) = \frac{\pi}{2}$ nach der Definition von Winkeln 11.1.11,
denn $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
Insbesondere stimmt unsere Definition von Senkrechtstehen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nach 11.1.12 mit unserer geometrischen Anschauung überein.

Satz (Satz von Pythagoras)

*Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und seien $v, w \in V$ mit $v \perp w$.
Dann $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.*

Beweis.

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle$$

Definition

Seien V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$.
Es heißen v und w orthogonal oder senkrecht zueinander (in Zeichen: $v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Bemerkung

Seien V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt und $v, w \in V$. Dann $v \perp w \iff \measuredangle(v, w) = \frac{\pi}{2}$ nach der Definition von Winkeln 11.1.11, denn $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
Insbesondere stimmt unsere Definition von Senkrechtstehen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nach 11.1.12 mit unserer geometrischen Anschauung überein.

Satz (Satz von Pythagoras)

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und seien $v, w \in V$ mit $v \perp w$. Dann $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=\langle v,w \rangle^* = 0} + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Beispiel

Die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Beispiel

Die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Beispiel

Die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V.
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ und $v := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \dots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \dots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Beispiel

Die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

Proposition

*Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $(v_1, \dots, v_m)$ ein ONS in V.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ und $v := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.
Dann $\lambda_i = \langle v_i, v \rangle$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ ein Orthonormalsystem (ONS) (in V),
wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und
$\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Ein ONS, welches V aufspannt, heißt Orthonormalbasis (ONB) von V.

Beispiel

Die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ ist eine ONB des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V.
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ und $v := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.
Dann $\lambda_i = \langle v_i, v \rangle$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Beweis.

$$\langle v_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{=\|v_j\|^2=1} = \lambda_j$$

für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\square$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Definition und Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Definition und Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Das orthogonale Komplement von U in V ist definiert durch

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Definition und Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Das orthogonale Komplement von U in V ist definiert durch

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

und ist selber wieder ein UR von V mit $U \cap U^\perp = \{0\}$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Definition und Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Das orthogonale Komplement von U in V ist definiert durch

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

und ist selber wieder ein UR von V mit $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. In V ist jedes ONS linear unabhängig. Insbesondere ist jede ONB von V eine Basis von V.

Definition und Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Das orthogonale Komplement von U in V ist definiert durch

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

und ist selber wieder ein UR von V mit $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Ist $U = \operatorname{span}(E)$ für ein $E \subseteq V$, so gilt $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in E : v \perp u\}$.

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$.
Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^{\perp}$.

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^\perp$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^{\perp}$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Beweis.

Seien $w, w' \in U$ mit $v - w, v - w' \in U^{\perp}$.

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^\perp$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Beweis.

Seien $w, w' \in U$ mit $v - w, v - w' \in U^\perp$. Dann

$$\langle w - w', w - w' \rangle \;=\; \langle w - w', (v - w') - (v - w) \rangle$$

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^\perp$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Beweis.

Seien $w, w' \in U$ mit $v - w, v - w' \in U^\perp$. Dann

$$\begin{aligned} \langle w - w', w - w' \rangle &= \langle w - w', (v - w') - (v - w) \rangle \\ &= \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w'}_{\in U^\perp} \rangle - \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w}_{\in U^\perp} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^\perp$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Beweis.

Seien $w, w' \in U$ mit $v - w, v - w' \in U^\perp$. Dann

$$\begin{aligned}\langle w - w', w - w' \rangle &= \langle w - w', (v - w') - (v - w) \rangle \\ &= \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w'}_{\in U^\perp} \rangle - \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w}_{\in U^\perp} \rangle = 0.\end{aligned}$$

□

Beispiel

(a) Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Ist $v \in U$, so ist v selber die orthogonale Projektion von v auf U.

Definition und Proposition

Seien V ein VR mit Skalarprodukt, U ein UR von V und $v, w \in V$. Dann gibt es höchstens ein $w \in U$ mit $v - w \in U^{\perp}$. Falls existent, nennt man dieses w die orthogonale Projektion von v auf U.

Beweis.

Seien $w, w' \in U$ mit $v - w, v - w' \in U^{\perp}$. Dann

$$\begin{aligned} \langle w - w', w - w' \rangle &= \langle w - w', (v - w') - (v - w) \rangle \\ &= \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w'}_{\in U^{\perp}} \rangle - \langle \underbrace{w - w'}_{\in U}, \underbrace{v - w}_{\in U^{\perp}} \rangle = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel

(a) Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.
Ist $v \in U$, so ist v selber die orthogonale Projektion von v auf U.
Ist $v \in U^{\perp}$, so ist sie der Nullvektor.

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger.

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i)g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i) g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V.

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i)g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V. Das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ von U in V

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i)g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V. Das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ von U in V besteht offenbar nur aus der Nullfolge.

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i)g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V. Das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ von U in V besteht offenbar nur aus der Nullfolge. Ist $f \in V$, so existiert die orthogonale Projektion von f auf U also genau dann, wenn $f \in U$

Beispiel

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen und darin den UR $V := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}$ der beschränkten Folgen sowie den UR U der Folgen mit endlichem Träger. Dann ist V vermöge $\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f(i) g(i)$ $(f, g \in V)$ ein VR mit Skalarprodukt und U ein UR von V. Das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ von U in V besteht offenbar nur aus der Nullfolge. Ist $f \in V$, so existiert die orthogonale Projektion von f auf U also genau dann, wenn $f \in U$ (und in diesem Fall ist sie f).

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$.

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U.

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \dots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Beweis.

$w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i \in U$.

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Beweis.

$w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i \in U$. Um $v - w \in U^\perp$ zu zeigen,

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Beweis.

$w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i \in U$. Um $v - w \in U^\perp$ zu zeigen, reicht es $\langle v_j, v - w \rangle = 0$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ zu zeigen.

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \dots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Beweis.

$w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i \in U$. Um $v - w \in U^\perp$ zu zeigen, reicht es $\langle v_j, v - w \rangle = 0$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ zu zeigen. Sei also $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann

$$\langle v_j, v - w \rangle = \langle v_j, v - \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i \rangle = \langle v_j, v \rangle - \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\in \{0,1\}}$$

Proposition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \in V$. Dann ist $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Insbesondere existiert diese.

Beweis.

$w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i \in U$. Um $v - w \in U^\perp$ zu zeigen, reicht es $\langle v_j, v - w\rangle = 0$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ zu zeigen. Sei also $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann

$$\begin{aligned}
\langle v_j, v - w\rangle &= \langle v_j, v - \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i\rangle = \langle v_j, v\rangle - \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{\in\{0,1\}} \\
&= \langle v_j, v\rangle - \langle v_j, v\rangle = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann gilt

$$\mathrm{coord}_{\underline{v}}(v) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, w \rangle \end{pmatrix} \qquad \textit{für jedes } v \in V.$$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann gilt

$$\mathrm{coord}_{\underline{v}}(v) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, w \rangle \end{pmatrix} \qquad \textit{für jedes } v \in V.$$

Beweis.

Die orthogonale Projektion eines $v \in V$ auf V ist v selber.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann gilt

$$\operatorname{coord}_{\underline{v}}(v) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, w \rangle \end{pmatrix} \qquad \textit{für jedes } v \in V.$$

Beweis.

Die orthogonale Projektion eines $v \in V$ auf V ist v selber.
Also gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in V$. $\square$

Proposition (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \notin U$.

Proposition (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \notin U$. Sei dann $w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U.

Proposition (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \notin U$. Sei dann $w := \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Dann ist $(v_1, \ldots, v_m, \frac{v-w}{\|v-w\|})$ ein ONS

Proposition (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \dots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ und $v \notin U$. Sei dann $w := \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Dann ist $(v_1, \dots, v_m, \frac{v-w}{\|v-w\|})$ ein ONS und es gilt

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m, v) = \operatorname{span}\left(v_1, \dots, v_m, \frac{v-w}{\|v-w\|}\right).$$

Proposition (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt, $(v_1, \ldots, v_m)$ ein ONS in V, $U := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ und $v \notin U$. Sei dann $w := \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. Dann ist $(v_1, \ldots, v_m, \frac{v-w}{\|v-w\|})$ ein ONS und es gilt

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m, v) = \operatorname{span}\left(v_1, \ldots, v_m, \frac{v-w}{\|v-w\|}\right).$$

Satz

Jeder endlichdimensionale VR mit Skalarprodukt besitzt eine ONB.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert,

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U\colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U\colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in U$.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U : V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in U$. Mit der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument rechnet man nun sofort die Linearität von P_U nach.

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U\colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i$ für alle $v \in U$. Mit der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument rechnet man nun sofort die Linearität von P_U nach. Weiter gilt

$$\ker P_U = \left\{ v \in V \mid \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i = 0 \right\}$$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in U$. Mit der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument rechnet man nun sofort die Linearität von P_U nach. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \ker P_U &= \left\{ v \in V \mid \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i = 0 \right\} \\ &= \{ v \in V \mid \langle v_1, v \rangle = \ldots = \langle v_m, v \rangle = 0 \} \end{aligned}$$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \dots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in U$. Mit der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument rechnet man nun sofort die Linearität von P_U nach. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \ker P_U &= \left\{ v \in V \mid \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i = 0 \right\} \\ &= \{ v \in V \mid \langle v_1, v \rangle = \ldots = \langle v_m, v \rangle = 0 \} \\ &= (\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp = U^\perp. \end{aligned}$$

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler UR von V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ die orthogonale Projektion $P_U(v)$ von v auf U und dadurch wird eine lineare Abbildung $P_U \colon V \to V$ definiert, deren Kern $U^\perp$ und deren Bild U ist.

Beweis.

Wähle eine ONB $(v_1, \ldots, v_m)$ von U. Dann $P_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ für alle $v \in U$. Mit der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument rechnet man nun sofort die Linearität von P_U nach. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \ker P_U &= \left\{ v \in V \mid \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i = 0 \right\} \\ &= \{ v \in V \mid \langle v_1, v \rangle = \ldots = \langle v_m, v \rangle = 0 \} \\ &= (\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m))^\perp = U^\perp. \end{aligned}$$

Klar sind $U \subseteq \operatorname{im} P_U$ und $\operatorname{im} P_U \subseteq U$. $\square$

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^{\perp}$.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$. Für endlichdimensionales V gilt insbesondere $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$. Für endlichdimensionales V gilt insbesondere $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Beweis.

Für jedes $v \in V$ gilt $v = \underbrace{P_U(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - P_U(v))}_{\in U^\perp}$, also $V = U + U^\perp$.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^{\perp}$. Für endlichdimensionales V gilt insbesondere $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$.

Beweis.

Für jedes $v \in V$ gilt $v = \underbrace{P_U(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - P_U(v))}_{\in U^{\perp}}$, also $V = U + U^{\perp}$.

Weiter ist die lineare Abbildung $U \times U^{\perp} \to U + U^{\perp},\ (u, v) \mapsto u + v$ injektiv, denn ist $(u, v) \in U \times U^{\perp}$ mit $u + v = 0$, so folgt $u = -v \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^{\perp}$. Für endlichdimensionales V gilt insbesondere $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$.

Beweis.

Für jedes $v \in V$ gilt $v = \underbrace{P_U(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - P_U(v))}_{\in U^{\perp}}$, also $V = U + U^{\perp}$.

Weiter ist die lineare Abbildung $U \times U^{\perp} \to U + U^{\perp},\ (u, v) \mapsto u + v$ injektiv, denn ist $(u, v) \in U \times U^{\perp}$ mit $u + v = 0$, so folgt $u = -v \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Korollar

Sei U ein UR des endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-VRs mit Skalarprodukt V. Dann $U = (U^{\perp})^{\perp}$.

Proposition

Sei U ein endlichdimensionaler UR des VRs mit Skalarprodukt V. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$. Für endlichdimensionales V gilt insbesondere $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Beweis.

Für jedes $v \in V$ gilt $v = \underbrace{P_U(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - P_U(v))}_{\in U^\perp}$, also $V = U + U^\perp$.

Weiter ist die lineare Abbildung $U \times U^\perp \to U + U^\perp,\ (u, v) \mapsto u + v$ injektiv, denn ist $(u, v) \in U \times U^\perp$ mit $u + v = 0$, so folgt $u = -v \in U \cap U^\perp = \{0\}$. $\square$

Korollar

Sei U ein UR des endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-VRs mit Skalarprodukt V. Dann $U = (U^\perp)^\perp$.

Beweis.

$U \subseteq (U^\perp)^\perp$ und $\dim(U) = \dim(V) - \dim(U^\perp) = \dim((U^\perp)^\perp)$ $\square$

Definition

Seien V und W VR mit Skalarprodukt. Dann heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn f linear ist und für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

Definition

Seien V und W VR mit Skalarprodukt. Dann heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn f linear ist und für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.
Ist sie zusätzlich bijektiv, so heißt sie Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt

Definition

Seien V und W VR mit Skalarprodukt. Dann heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn f linear ist und für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.
Ist sie zusätzlich bijektiv, so heißt sie Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt [beachte, dass die Injektivität automatisch erfüllt ist, da aus $f(v) = 0$ folgt $\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = 0$ und daher $v = 0$].

Definition

Seien V und W VR mit Skalarprodukt. Dann heißt eine Abbildung $f: V \to W$ ein Homomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn f linear ist und für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.
Ist sie zusätzlich bijektiv, so heißt sie Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt [beachte, dass die Injektivität automatisch erfüllt ist, da aus $f(v) = 0$ folgt $\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = 0$ und daher $v = 0$].

Bemerkung

Aus der Polarisationsformel 11.1.10 folgt, dass man in dieser Definition die Bedingung $\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ ersetzen kann durch

$$\forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|.$$

Definition

Seien V und W VR mit Skalarprodukt. Dann heißt eine Abbildung $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn f linear ist und für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.
Ist sie zusätzlich bijektiv, so heißt sie Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt [beachte, dass die Injektivität automatisch erfüllt ist, da aus $f(v) = 0$ folgt $\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = 0$ und daher $v = 0$].

Bemerkung

Aus der Polarisationsformel 11.1.10 folgt, dass man in dieser Definition die Bedingung $\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ ersetzen kann durch

$$\forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|.$$

Beispiel

$R_\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ ist für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f \colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR. Seien nun $v, w \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR. Seien nun $v, w \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$.
Zu zeigen ist $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR. Seien nun $v, w \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$. Zu zeigen ist $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Es gilt

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i), \sum_{j=1}^n \mu_j f(v_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^* \mu_j \langle f(v_i), f(v_j)\rangle$$

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR. Seien nun $v, w \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$. Zu zeigen ist $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle f(v), f(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i), \sum_{j=1}^n \mu_j f(v_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^* \mu_j \langle f(v_i), f(v_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \mu_i = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^* \mu_j \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right\rangle
\end{aligned}$$

Satz

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt und sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W ist.

Beweis.

Die eine Richtung ist klar. Für die andere sei $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine ONB von W. Nach 6.3.8 ist f ein Isomorphismus von VR. Seien nun $v, w \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$. Zu zeigen ist $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle f(v), f(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i), \sum_{j=1}^n \mu_j f(v_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^* \mu_j \langle f(v_i), f(v_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \mu_i = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^* \mu_j \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right\rangle \\
&= \langle v, w \rangle.
\end{aligned}$$

□

Korollar

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Je zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt sind als solche isomorph.

Korollar

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Je zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt sind als solche isomorph.

Beweis.

Seien V und W n-dimensionale $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt. Wähle ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_n)$ von W. Dann ist die lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt.

Korollar

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Je zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt sind als solche isomorph.

Beweis.

Seien V und W n-dimensionale $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt. Wähle ONB $(v_1, \dots, v_n)$ von V und $(w_1, \dots, w_n)$ von W. Dann ist die lineare Abbildung $f \colon V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt. □

Korollar

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann sind äquivalent:

(a) *$\underline{v}$ ist ONB von V,*

(b) $\mathrm{vec}_{\underline{v}} \colon \mathbb{K}^n \to V$ *ist ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt.*

(c) $\mathrm{coord}_{\underline{v}} \colon V \to \mathbb{K}^n$ *ist ein Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt.*

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal (vor allem wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ manchmal auch unitär), wenn f_A ein Isomorphismus des VRs $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt orthogonal (vor allem wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ manchmal auch unitär), wenn f_A ein Isomorphismus des VRs $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist.

Satz

Seien V und W VRe mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$. Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$f \text{ ist Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt} \iff M(f, \underline{v}, \underline{w}) \text{ orthogonal.}$$

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt orthogonal (vor allem wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ manchmal auch unitär), wenn f_A ein Isomorphismus des VRs $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist.

Satz

Seien V und W VRe mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

f ist Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt $\iff$ $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ orthogonal.

Beweis.

$f = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{M(f,\underline{v},\underline{w})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ und daher $f_{M(f,\underline{v},\underline{w})} = \mathrm{coord}_{\underline{w}} \circ f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}}$.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal (vor allem wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ manchmal auch unitär), wenn f_A ein Isomorphismus des VRs $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist.

Satz

Seien V und W VRe mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

f ist Isomorphismus von VR mit Skalarprodukt $\iff$ $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ orthogonal.

Beweis.

$f = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{M(f,\underline{v},\underline{w})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ und daher $f_{M(f,\underline{v},\underline{w})} = \mathrm{coord}_{\underline{w}} \circ f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}}$. Da $\mathrm{vec}_{\underline{w}}$, $\mathrm{coord}_{\underline{v}}$, $\mathrm{coord}_{\underline{w}}$ und $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ Isomorphismen von VRen mit Skalarprodukt sind, ist f ein solcher genau dann, wenn $f_{M(f,\underline{v},\underline{w})}$ einer ist. $\square$

Satz

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *Die Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(c) *Die Zeilen von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(d) $A^*A = I_n$

(e) $AA^* = I_n$

(f) *A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.*

Satz

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *Die Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(c) *Die Zeilen von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(d) $A^*A = I_n$

(e) $AA^* = I_n$

(f) *A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.*

Beweis.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b), weil $f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)$ die Spalten von A sind.

Satz

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *Die Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(c) *Die Zeilen von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(d) $A^*A = I_n$

(e) $AA^* = I_n$

(f) *A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.*

Beweis.

(a) $\iff$ (b), weil $f_A(e_1), \ldots, f_A(e_n)$ die Spalten von A sind. Direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation folgen (b) $\iff$ (d) und (c) $\iff$ (e).

Satz

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *Die Spalten von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(c) *Die Zeilen von A bilden eine ONB des $\mathbb{K}^n$.*

(d) $A^* A = I_n$

(e) $AA^* = I_n$

(f) *A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.*

Beweis.

(a) $\iff$ (b), weil $f_A(e_1), \ldots, f_A(e_n)$ die Spalten von A sind. Direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation folgen (b) $\iff$ (d) und (c) $\iff$ (e). Schließlich gilt (d) $\iff$ (e) $\iff$ (f) wegen 7.2.13. $\square$

Beispiel

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ orthogonal.