§11.3 Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt f selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt f selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Beispiel

Die orthogonale Projektion $P_U \in \mathrm{End}(V)$ auf einen endlichdimensionalen UR U eines VRs mit Skalarprodukt V ist selbstadjungiert.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt f selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Beispiel

Die orthogonale Projektion $P_U \in \mathrm{End}(V)$ auf einen endlichdimensionalen UR U eines VRs mit Skalarprodukt V ist selbstadjungiert. In der Tat: Wegen $V = U + U^\perp$ reicht es zu beobachten, dass für alle $u_1, u_2 \in U$ und $v_1, v_2 \in U^\perp$ gilt
$\langle P_U(u_1 + v_1), u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ und
$\langle u_1 + v_1, P_U(u_2 + v_2)\rangle = \langle u_1 + v_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt f selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Beispiel

Die orthogonale Projektion $P_U \in \mathrm{End}(V)$ auf einen endlichdimensionalen UR U eines VRs mit Skalarprodukt V ist selbstadjungiert. In der Tat: Wegen $V = U + U^\perp$ reicht es zu beobachten, dass für alle $u_1, u_2 \in U$ und $v_1, v_2 \in U^\perp$ gilt
$\langle P_U(u_1 + v_1), u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ und
$\langle u_1 + v_1, P_U(u_2 + v_2)\rangle = \langle u_1 + v_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt selbstadjungiert (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch symmetrisch, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch hermitesch), wenn $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ selbstadjungiert ist.

Definition

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt f selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Beispiel

Die orthogonale Projektion $P_U \in \mathrm{End}(V)$ auf einen endlichdimensionalen UR U eines VRs mit Skalarprodukt V ist selbstadjungiert. In der Tat: Wegen $V = U + U^\perp$ reicht es zu beobachten, dass für alle $u_1, u_2 \in U$ und $v_1, v_2 \in U^\perp$ gilt
$\langle P_U(u_1 + v_1), u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2 + v_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ und
$\langle u_1 + v_1, P_U(u_2 + v_2)\rangle = \langle u_1 + v_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt selbstadjungiert (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch symmetrisch, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch hermitesch), wenn $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ selbstadjungiert ist.

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [$\to$7.1.1] und daher $f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt.

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [→7.1.1] und daher $f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt. Es gilt daher

$$\begin{aligned} & f \text{ selbstadjungiert} \\ \iff \quad & \forall v, w \in V : \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \end{aligned}$$

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [$\to$7.1.1] und daher $f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt. Es gilt daher

$$\begin{aligned} & f \text{ selbstadjungiert} \\ \iff \quad & \forall v, w \in V \colon \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \\ \iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(x)), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y) \rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)) \rangle \end{aligned}$$

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [→7.1.1] und daher $f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt. Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
& f \text{ selbstadjungiert} \\
\iff\ & \forall v, w \in V\colon \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \\
\iff\ & \forall x, y \in \mathbb{K}^n\colon \langle f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(x)), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)\rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(y))\rangle \\
\iff\ & \forall x, y \in \mathbb{K}^n\colon \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f, \underline{v})x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)\rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f, \underline{v})y)
\end{aligned}
$$

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [$\to$7.1.1] und daher
$f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt. Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
& f \text{ selbstadjungiert} \\
\iff \quad & \forall v, w \in V\colon \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n\colon \langle f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(x)), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)\rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(y))\rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n\colon \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f,\underline{v})x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)\rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f,\underline{v})y)\rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n\colon \langle M(f,\underline{v})x, y\rangle = \langle x, M(f,\underline{v})y\rangle
\end{aligned}
$$

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt und ONB $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$.
Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
f selbstadjungiert $\iff$ $M(f, \underline{v})$ selbstadjungiert.

Beweis.

Es gilt $f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$ [→7.1.1] und daher $f \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}} = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_{M(f,\underline{v})}$. Da $\underline{v}$ eine ONB ist, ist $\mathrm{vec}_{\underline{v}}$ nach 11.2.24 ein Isomorphismus von VRen mit Skalarprodukt. Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
& f \text{ selbstadjungiert} \\
\iff \quad & \forall v, w \in V \colon \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(x)), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y) \rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), f(\mathrm{vec}_{\underline{v}}(y)) \rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f,\underline{v})x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(y) \rangle = \langle \mathrm{vec}_{\underline{v}}(x), \mathrm{vec}_{\underline{v}}(M(f,\underline{v})y) \rangle \\
\iff \quad & \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle M(f,\underline{v})x, y \rangle = \langle x, M(f,\underline{v})y \rangle \\
\iff \quad & M(f,\underline{v}) \text{ selbstadjungiert}
\end{aligned}
$$

□

Proposition

Seien K ein kommutativer Ring, $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times r}$. Dann gilt:

(a) $(AB)^T = B^T A^T$

(b) $(AB)^* = B^* A^*$ *falls $K = \mathbb{K}$*

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $x, y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $\langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $x, y \in \mathbb{K}^n$. *Dann gilt* $\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Beweis.

$$\langle A^*x, y\rangle \overset{11.1.3(a)}{=} (A^*x)^*y = x^*(A^*)^*y = x^*Ay \overset{11.1.3(a)}{=} \langle x, Ay\rangle$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $x, y \in \mathbb{K}^n$. *Dann gilt* $\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Beweis.

$$\langle A^*x, y\rangle \overset{11.1.3(a)}{=} (A^*x)^*y = x^*(A^*)^*y = x^*Ay \overset{11.1.3(a)}{=} \langle x, Ay\rangle \qquad \square$$

Proposition

Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *gilt*

$$A \text{ selbstadjungiert } \iff A^* = A.$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $x, y \in \mathbb{K}^n$. *Dann gilt* $\langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Beweis.

$\langle A^* x, y\rangle \overset{11.1.3(a)}{=} (A^* x)^* y = x^*(A^*)^* y = x^* A y \overset{11.1.3(a)}{=} \langle x, Ay\rangle$ □

Proposition

Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *gilt*

$$A \text{ selbstadjungiert} \iff A^* = A.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A \text{ selbstadjungiert} &\iff \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \\ &\iff \forall x, y \in \mathbb{K}^n \colon \langle Ax, y\rangle = \langle A^* x, y\rangle \\ &\iff A = A^* \end{aligned}$$

□

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *selbstadjungiert und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\chi_A(\lambda) = 0$.

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$.
Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen.

Lemma
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$.
Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis.
Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Dann ist λ ein Eigenwert von A,
das heißt es gibt $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$.

Lemma

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$.
Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Dann ist λ ein Eigenwert von A, das heißt es gibt $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$. Es folgt

$$\lambda\langle x, x\rangle \overset{11.1.1(4)}{=} \langle x, \lambda x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle \overset{11.1.1(2)}{=} \langle \lambda x, x\rangle = \lambda^*\langle x, x\rangle$$

und daher $\lambda = \lambda^*$ nach 11.1.1(6). $\square$

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht.

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

$\underline{n - 1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Wir zeigen zunächst, dass f einen reellen Eigenwert λ besitzt:

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

$\underline{n - 1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Wir zeigen zunächst, dass f einen reellen Eigenwert λ besitzt: Wählt man nämlich eine ONB $\underline{w}$ von V und setzt $A := M(f, \underline{w})$, so ist A selbstadjungiert und daher jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$ nach dem Lemma sogar aus $\mathbb{R}$. Nun gilt aber $\chi_f = \chi_A$ und es gibt ein solches λ wegen $\deg \chi_f = n \geq 1$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

$\underline{n-1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Wir zeigen zunächst, dass f einen reellen Eigenwert λ besitzt: Wählt man nämlich eine ONB $\underline{w}$ von V und setzt $A := M(f, \underline{w})$, so ist A selbstadjungiert und daher jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$ nach dem Lemma sogar aus $\mathbb{R}$. Nun gilt aber $\chi_f = \chi_A$ und es gibt ein solches λ wegen $\deg \chi_f = n \geq 1$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

Wir wählen nun einen Eigenvektor $u \in V$ zu diesem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.
Setze $U := \operatorname{span}(u)$.

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

$\underline{n - 1 \to n \; (n \in \mathbb{N})}$ Wir zeigen zunächst, dass f einen reellen Eigenwert λ besitzt: Wählt man nämlich eine ONB $\underline{w}$ von V und setzt $A := M(f, \underline{w})$, so ist A selbstadjungiert und daher jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$ nach dem Lemma sogar aus $\mathbb{R}$. Nun gilt aber $\chi_f = \chi_A$ und es gibt ein solches λ wegen $\deg \chi_f = n \geq 1$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

Wir wählen nun einen Eigenvektor $u \in V$ zu diesem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Setze $U := \operatorname{span}(u)$. Da f selbstadjungiert ist, gilt $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, denn ist $v \in U^\perp$, so gilt $\langle f(v), u \rangle = \langle v, f(u) \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$.

Satz (benutzt Fundamentalsatz)

Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Skalarprodukt und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann gibt es eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Induktion nach $n := \dim V$.

$\underline{n = 0}$ nichts zu zeigen

$\underline{n - 1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Wir zeigen zunächst, dass f einen reellen Eigenwert λ besitzt: Wählt man nämlich eine ONB $\underline{w}$ von V und setzt $A := M(f, \underline{w})$, so ist A selbstadjungiert und daher jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$ nach dem Lemma sogar aus $\mathbb{R}$. Nun gilt aber $\chi_f = \chi_A$ und es gibt ein solches λ wegen $\deg \chi_f = n \geq 1$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra.

Wir wählen nun einen Eigenvektor $u \in V$ zu diesem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Setze $U := \operatorname{span}(u)$. Da f selbstadjungiert ist, gilt $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, denn ist $v \in U^\perp$, so gilt $\langle f(v), u \rangle = \langle v, f(u) \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$. Nun ist $f|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp, v \mapsto f(v)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus des VRs mit Skalarprodukt $U^\perp \ldots$ $\square$

Korollar (benutzt Fundamentalsatz)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *selbstadjungiert.*

Korollar (benutzt Fundamentalsatz)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine reelle Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^* DP$.

Korollar (benutzt Fundamentalsatz)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine reelle Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A = P^* DP$. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Beweis.

Wähle ONB $\underline{v}$ von $\mathbb{K}^n$, die aus Eigenvektoren von A zu reellen Eigenwerten besteht.

Korollar (benutzt Fundamentalsatz)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine reelle Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^*DP$. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Beweis.

Wähle ONB $\underline{v}$ von $\mathbb{K}^n$, die aus Eigenvektoren von A zu reellen Eigenwerten besteht. Nach Satz 11.2.26 ist $P := M(\underline{e}, \underline{v})$ [$\rightarrow$7.1.10] dann orthogonal und daher

$$P^* \overset{11.2.27(f)}{=} P^{-1} \overset{7.2.11}{=} M(\underline{v}, \underline{e}).$$

Korollar (benutzt Fundamentalsatz)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine reelle Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^*DP$. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Beweis.

Wähle ONB $\underline{v}$ von $\mathbb{K}^n$, die aus Eigenvektoren von A zu reellen Eigenwerten besteht. Nach Satz 11.2.26 ist $P := M(\underline{e}, \underline{v})$ [→7.1.10] dann orthogonal und daher

$$P^* \overset{11.2.27(f)}{=} P^{-1} \overset{7.2.11}{=} M(\underline{v}, \underline{e}).$$

Also

$$A \overset{7.1.4(e)}{=} M(f_A, \underline{e}) \overset{7.2.5}{=} M(\underline{v}, \underline{e})M(f_A, \underline{v})M(\underline{e}, \underline{v}) = P^*DP,$$

wobei $D := M(f_A, \underline{v})$ eine reelle Diagonalmatrix ist. □