Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra
Wintersemester 2017/2018

§3.3 Auflösbare Gruppen

Definition 3.3.1. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ nennt man $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ den *Kommutator* von a und b. Man nennt $G' := \langle\{[a, b] \mid a, b \in G\}\rangle \leq G$ die *Kommutatorgruppe* von G. Weiter definiert man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die *n-te Kommutatorgruppe* $G^{(n)}$ von G rekursiv durch $G^{(0)} := G$ und $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.3.2. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0,\ a_i, b_i \in G\}$
[„$\supseteq$“ klar; „$\subseteq$“ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$]

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.
[G' ist nach 1.3.12 eine charakteristische Untergruppe und daher ein Normalteiler von G; ist $N \lhd G$ mit G/N abelsch, so $\overline{[a, b]}^N = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \overline{aa^{-1}}^N\overline{bb^{-1}}^N = 1$ und daher $[a, b] \in N$ für alle $a, b \in G$, woraus $G' \subseteq N$ folgt]

Definition 3.3.3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Permutation der Form

$$(x_1 \dots x_\ell) := \left(\begin{array}{c} \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \\ \begin{matrix} & & x_1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x_\ell & & & & x_2 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \ddots & & & & x_3 \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & x_4 & & \end{matrix} \\ x \mapsto x \text{ für } x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\} \end{array}\right)$$

mit $\ell \in \{2, \dots, n\}$ und paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_\ell \in \{1, \dots, n\}$ nennt man einen *ℓ-Zykel* in S_n. Man nennt 2-Zykel auch Transpositionen.

Proposition 3.3.4. [$\to$1.1.12] *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann*

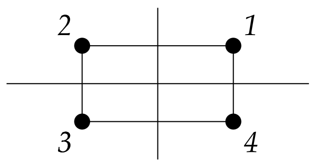
$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0,\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Beweis. „$\supseteq$“ Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Zu zeigen: $(x_1\ x_2\ x_3) \in A_n$. Dies folgt aus $(x_1\ x_2\ x_3) = (x_2\ x_3)(x_1\ x_3)$.

„$\subseteq$“ Sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so $(x_1\ x_2)(x_3\ x_4) = (x_1\ x_3\ x_2)(x_1\ x_3\ x_4)$.
Sind $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so $(x_1\ x_2)(x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)$.
Sind $x_1, x_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_1 \neq x_2$, so $(x_1\ x_2)(x_1\ x_2) = 1$. $\square$

Proposition 3.3.5. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S_n' = A_n$ und*

$$A_n' = \begin{cases} \{1\} & \textit{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \cong V & \textit{falls } n = 4, \\ A_n & \textit{falls } n \geq 5. \end{cases}$$



[→1.1.9(e)]

Beweis. $\underline{S_n' \subseteq A_n}$ Nach 3.3.2(c) genügt es zu zeigen, dass S_n/A_n abelsch ist. Dies ist klar, da $S_n/A_n \cong C_2$ für $n \geq 2$ [→1.3.18] und $S_n/A_n \cong C_1$ für $n \in \{0,1\}$.

$\underline{A_n \subseteq S_n'}$ Nach 3.3.4 genügt es zu zeigen, dass jeder 3-Zykel in S_n' liegt. Seien hierzu x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden. Dann

$$(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_3)(x_2\ x_3)(x_1\ x_3)^{-1}(x_2\ x_3)^{-1} = [(x_1\ x_3), (x_2\ x_3)] \in S_n'.$$

$\underline{A_n' = \{1\} \text{ für } n \leq 3}$ Für $n \leq 3$ ist $A_n \cong A_n/\{1\}$ abelsch, da $\#A_n \leq \#A_3 = \frac{\#S_3}{2} = \frac{3!}{2} = 3$.

$\underline{A_4' = V_4}$ „$\subseteq$“ Wegen $\#A_4 = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12$ gilt $\#(A_4/V_4) = 3$ und A_4/V_4 ist abelsch.

„$\supseteq$“ Ist $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, so nach 3.3.4

$$\begin{aligned}(x_1\ x_2)(x_3\ x_4) &= (x_1\ x_2\ x_3)(x_1\ x_2\ x_4)(x_1\ x_2\ x_3)^{-1}(x_1\ x_2\ x_4)^{-1} \\ &= [\underbrace{(x_1\ x_2\ x_3)}_{\in A_4}, \underbrace{(x_1\ x_2\ x_3)}_{\in A_4}] \in A_4'.\end{aligned}$$

$\underline{A_n' = A_n \text{ falls } n \geq 5}$ Sei $n \geq 5$. Zu zeigen: $A_n \subseteq A_n'$. Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Zu zeigen: $(x_1\ x_2\ x_3) \in A_n'$. Wähle $x_4, x_5 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ mit $x_4 \neq x_5$. Dann

$$(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_4)(x_1\ x_3\ x_5)(x_1\ x_2\ x_4)^{-1}(x_1\ x_3\ x_5)^{-1} = [(x_1\ x_2\ x_4), (x_1\ x_3\ x_5)] \in A_n'.$$

□

Definition 3.3.6. Sei G eine Gruppe. Es heißt $(G_0, \dots, G_n)$ eine *Normalreihe* von G, wenn $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_n = \{1\}$. In diesem Fall heißen die Gruppen G_k/G_{k+1} ($k \in \{0, \dots n-1\}$) die *Faktoren* dieser Normalreihe. Es heißt G *auflösbar*, wenn G eine Normalreihe mit (lauter) abelschen Faktoren besitzt.

Satz 3.3.7. *Sei G eine Gruppe. Dann*

$$G \textit{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Beweis. „$\Longleftarrow$“ Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so ist $(G^{(0)}, \ldots, G^{(n)})$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.

„$\Longrightarrow$“ Sei $(G_0, \ldots, G_n)$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Wir zeigen durch Induktion nach $k \in \{0, \ldots, n\}$, dass $G^{(k)} \subseteq G_k$:

$\underline{k = 0}$ $\quad G^{(0)} = G = G_0$

$\underline{k \to k+1 \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\})}$ $\quad G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \underset{G^{(k)} \subseteq G_k}{\overset{\text{IV}}{\subseteq}} G'_k \overset{\substack{G_k/G_{k+1} \\ \text{abelsch}}}{\subseteq} G_{k+1}$ $\square$

Satz 3.3.8. *S_n ist auflösbar für $n \leq 4$, nicht aber für $n \geq 5$.*

Beweis. Nach Proposition 3.3.5 gilt $S_n^{(2)} = A'_n = \{1\}$ für $n \leq 3$,

$$S_4^{(3)} = A_4^{(2)} = V'_4 \overset{\substack{V_4 \cong V \cong C_2 \times C_2 \\ \text{abelsch}}}{=} \{1\}$$

und $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = \ldots = A_n \neq \{1\}$ für $n \geq 5$. $\square$

Proposition 3.3.9. *Sei G eine Gruppe.*

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \lhd G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \;\&\; G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis. (a) Klar, da man durch Induktion $H^{(n)} \subseteq G^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigt.

(b) Gelte $N \lhd G$. Durch Induktion zeigt man $(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ [→1.4.1]:

$\underline{n = 0}$ $\quad G/N = \underbrace{(GN)}_{=G}/N$

$\underline{n \to n+1 \; (n \in \mathbb{N}_0)}$

$$\begin{aligned}
(G/N)^{(n+1)} &= ((G/N)^{(n)})' \overset{\text{IV}}{=} ((G^{(n)}N)/N)' \\
&\overset{3.3.2(b)}{=} \{[\overline{a_1 n_1}^N, \overline{a'_1 n'_1}^N] \cdots [\overline{a_m n_m}^N, \overline{a'_m n'_m}^N] \mid m \in \mathbb{N}_0,\ a_i, a'_i \in G^{(n)},\ n_i, n'_i \in \mathbb{N}\} \\
&= \{\overline{[a_1, a'_1] \cdots [a_m, a'_m]}^N \mid m \in \mathbb{N}_0,\ a_i, a'_i \in G^{(n)}\} \\
&\overset{3.3.2(b)}{=} \{\overline{g}^N \mid g \in G^{(n+1)}\} = \{\overline{gn}^N \mid g \in G^{(n+1)},\ n \in N\} = (G^{(n+1)}N)/N
\end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$“ Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so $(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N = N/N = \{1\}$.

„$\Longleftarrow$“ Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $N^{(n)} = \{1\}$ und $(G/N)^{(n)} = \{1\}$, so $(G^{(n)}N)/N = N/N$, also $G^{(n)} \subseteq N$ und $G^{(2n)} \subseteq N^{(n)} = \{1\}$. $\square$

Satz 3.3.10. *Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p-Gruppe ist auflösbar.*

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.
$\underline{e = 0}$ ✓
$\underline{0, \dots, e-1 \to e \quad (e \in \mathbb{N})}$ Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$. Nach 3.1.18 gilt $\#Z(G) > 1$. Nach dem Satz von Lagrange 1.3.19 gibt es also $d \in \{0, \dots, e-1\}$ mit $\#(G/Z(G)) = p^d$ (siehe auch 1.3.14). Nach Induktionsvoraussetzung ist $G/Z(G)$ auflösbar. Da $Z(G)$ abelsch und daher auch auflösbar ist, folgt mit 3.3.9(b), dass auch G auflösbar ist. □

Proposition 3.3.11. *Sei G eine Gruppe und $N \lhd G$. Bezeichne $\pi\colon G \to G/N,\ a \mapsto \overline{a}^N$ den kanonischen Epimorphismus. Dann wird durch die Zuordnungen*

$$\begin{aligned} I &\mapsto \pi(I) = I/N \qquad \textit{und} \\ \pi^{-1}(J) &\leftarrow\!\shortmid J \end{aligned}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der $\left\{\begin{matrix}\textit{Untergruppen}\\ \textit{Normalteiler}\end{matrix}\right\}$ *I von G mit $N \subseteq I$ und der Menge der* $\left\{\begin{matrix}\textit{Untergruppen}\\ \textit{Normalteiler}\end{matrix}\right\}$ *von G/N definiert.*

Beweis. Übung. □

Satz 3.3.12. *Sei G eine endliche Gruppe und $(G_0, \dots, G_m)$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe $(H_0, \dots, H_n)$ von G mit $\{G_0, \dots, G_m\} \subseteq \{H_0, \dots, H_n\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle zyklisch von Primzahlordnung sind.*

Beweis. Ohne Einschränkung

$$G = G_0 \underset{\neq}{\rhd} G_1 \underset{\neq}{\rhd} \dots \underset{\neq}{\rhd} G_m = \{1\}.$$

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es sicher J mit

$$\{1\} \underset{\text{echt}}{<} J \underset{\text{echt}}{<} G_k/G_{k+1}$$

(z.B. wegen 3.2.6(a) oder indem man J einfach als geeignete zyklische Untergruppe von G_k/G_{k+1} wählt). Da G_{k+1}/G_k abelsch ist, gilt

$$\{1\} \underset{\neq}{\lhd} J \underset{\neq}{\lhd} G_k/G_{k+1}.$$

Für $I := \pi^{-1}(J)$ mit $\pi\colon G_k \to G_k/G_{k+1}$ kanonisch gilt nach 3.3.11 dann

$$G_k \underset{\neq}{\rhd} I \underset{\neq}{\rhd} G_{k+1}.$$

Es ist I der Kern von $G_k \twoheadrightarrow G_k/G_{k+1} \twoheadrightarrow (G_k/G_{k+1})/J$ und daher $G_k/I \cong \underbrace{(\underbrace{G_k/G_{k+1}}_{\text{abelsch}})/J}_{\text{abelsch}}$ abelsch. Weiter ist $I/G_{k+1} \leq \underbrace{G_k/G_{k+1}}_{\text{abelsch}}$ auch abelsch. Mache nun so weiter... □