Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Man zeige, dass man Blockmatrizen so multipliziert, wie man Matrizen multipliziert, genauer: Seien K ein kommutativer Ring, $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, $n_i \in \mathbb{N}_0$, $m_j \in \mathbb{N}_0$, $p_k \in \mathbb{N}_0$, $A_{ij} \in K^{m_i \times n_j}$ und $B_{jk} \in K^{n_j \times p_k}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, p\}$. Setze $M := m_1 + \ldots + m_m$, $N := n_1 + \ldots + n_n$, $P := p_1 + \ldots + p_p$. Zeige

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{array}\right)}_{\in K^{M \times N}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \dots & B_{1p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{n1} & \dots & B_{np} \end{array}\right)}_{\in K^{N \times P}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{j=1}^n A_{1j} B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n A_{1j} B_{jp} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \sum_{j=1}^n A_{mj} B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n A_{mj} B_{jp}. \end{array}\right)}_{\in K^{M \times P}}.$$

Aufgabe 2: Zeige:

(a) Für alle Körper K, für alle paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_n \in K$ und für alle $b_1, \dots, b_n$ gibt es ein Polynom $p \in K[X]$ mit $p(a_i) = b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Für alle Diagonalmatrizen $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(D) = D^*$.

(c) Für alle normalen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $A^* = p(A)$.

(d) Für alle normalen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und alle $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AC = CA$ gilt $A^*C = CA^*$.

(e) Für alle normalen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und alle $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $BC = CA$ gilt $B^*C = CA^*$.

Seien ab jetzt $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:

(f) Sind $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normal und $h \in \operatorname{End}(V)$ mit $g \circ h = h \circ f$, so gilt $g^* \circ h = h \circ f^*$.

(g) Sind $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normal mit $f \circ g = g \circ f$, so sind auch $f \circ g$ und $f + g$ normal.

Hinweis: Betrachte für (e) die Blockmatrizen $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$.

Abgabe bis Freitag, den 15. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.