Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Sei K ein Körper.

(a) Zeige, dass
$$A := \left\{ a + \sum_{i=2}^{n} a_i X^i \;\middle|\; a, a_2, \dots, a_n \in K \right\}$$
ein Unterring des Polynomringes $K[X]$ ist.

(b) Begründe, warum A ein Integritätsring ist.

(c) Bestimme die Einheitengruppe $A^\times$.

(d) Zeige, dass in A jedes Element assoziiert ist zu einem Produkt von irreduziblen Elementen von A.

(e) Sind die Polynome X^2 und X^3 in A irreduzibel? Sind sie prim?

(f) Ist A faktoriell?

(g) Schreibe X^6 und X^7 auf alle möglichen Weisen als Produkt von normierten irreduziblen Elementen von A.

(h) Besitzen X^6 und X^7 eine Primfaktorzerlegung in A?

(i) Besitzen X^6 und X^7 in A einen ggT? Falls ja, welchen?

(j) Besitzen X^6 und X^7 in A ein kgV? Falls ja, welches?

Aufgabe 2: Bestimme (händisch) die Primfaktorzerlegung von

(a) $10^8 - 1$ in $\mathbb{Z}$,

(b) $X^3 - X^2 + X - 1$ in $\mathbb{F}_7[X]$ und

(c) $X^5 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X - 2$ in $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 3: Seien A ein Integritätsring und $a, b \in A$. Sei c ein ggT und d ein kgV von a und b. Zeige $ab \mathrel{\widehat{=}} cd$.

Hinweis: Es gibt einen kurzen einfachen Beweis, der aber nicht ganz einfach zu finden ist. Falls Du ihn nicht findest, so zeige die Behauptung zumindest für den Fall, dass A faktoriell ist.

Abgabe bis Freitag, den 29. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.