Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 10 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Sei $C|K$ eine Körpererweiterung und C algebraisch abgeschlossen. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $A_1, \dots, A_n$ endliche Teilmengen von K. Betrachte

$$F := \left\{ \prod_{a \in A_i} (X_i - a) \;\middle|\; i \in \{1, \dots, n\} \right\} \subseteq K[\underline{X}]$$

und das davon erzeugte Ideal $I := (F) \subseteq K[\underline{X}]$, für welches offensichtlich

$$V(I) = A_1 \times \ldots \times A_n$$

gilt. Weiter sei $\leq$ eine Monomordnung auf $[\underline{X}]$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_i < \#A_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeige:

(a) Es gibt keine $f, g \in K[\underline{X}]$ mit $f \underset{F}{\longrightarrow}_{\leq} g\ [\underline{X}^\alpha]$.

(b) Gilt $f \underset{F}{\overset{*}{\longrightarrow}}_{\leq} g$, dann teilt jedes Monom von g ein Monom von f.

(c) Gilt $g \underset{F}{\longrightarrow}_{\leq} h\ [u]$, dann ist jedes Monom aus $M(g) \setminus M(h)$ ein Teiler von u.

(d) F ist eine Gröbnerbasis von I bezüglich $\leq$.

(e) I ist ein Radikalideal.

(f) Sei $f \in I(A_1 \times \ldots \times A_n) \subseteq K[\underline{X}]$ und es teile $\underline{X}^\alpha$ kein von $\underline{X}^\alpha$ verschiedenes Monom von f (zum Beispiel weil $|\alpha| = \deg p$). Dann ist $\underline{X}^\alpha$ kein Monom von p.

Man nennt (f) auch den *kombinatorischen Nullstellensatz*. Er hat zahlreiche Anwendungen in der Kombinatorik, siehe zum Beispiel:

`https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/media/dma/parczyk/BA_thesis_parczyk.pdf`

Aufgabe 2. Franz und Sepp fällt so langsam ein, wie das ganze Malheur passieren konnte: Auf der Weihnachtsfeier hatte Gretel geprahlt, die Aufgaben seien so leicht, dass sie alleine drei davon an einem Tag schaffe und diese sogar simultan bearbeiten könnte. Zenz hatte versucht, ihr zu erklären, dass ihr das auch nicht viel bringt, da es mit mehr Lösungen nur immer schwieriger werde, einen konkreten Plan aus der von Singular berechneten Gröbnerbasis zu extrahieren. Gretel meinte, es wären doch gar nicht so viele Möglichkeiten – und so beschlossen sie, für jede zulässige Lösung eine Tasse Glühwein zu trinken.

Irgendwie muss es ihnen wohl gelungen sein, die Anzahl der Elemente von $V(I)$ zu berechnen, wobei I Dein Ideal aus Aufgabe 2 von Blatt 8 sei, welches kodiert, dass jedes $x \in V(I)$ ein zulässiger Plan ist, der die Relation R respektiert (ohne die Zusatzbedingungen aus Aufgabe 2(c)(d) von Blatt 8). Dies wollen wir nun nachvollziehen.

(a) Zeige, dass I ein Radikalideal ist.

(b) Berechne $\#V(I)$. Der Befehl `vdim(I)` kann hierbei nützlich sein. Erkläre kurz, was `vdim` berechnet und verwende 2.8.14.

(c) Wie viele Tassen Glühwein mussten nach Gretels Rede konsumiert werden? Verändere dazu die Konstruktion deines Ideals I so, dass nun maximal *drei* Aufgaben an einem Tag erledigt werden dürfen.

Hinweis: Es ist ratsam, hierfür eine neue Datei anzulegen.

(d) Gretel findet auch Zenz' Lösung für Aufgabe 2 von Blatt 9 unnötig kompliziert. Sie ist der Meinung, dass eine Rekonstruktion der erledigten Aufgaben dort ohnehin nur möglich sein könne, wenn es eine *eindeutige* Lösung gebe, das heißt wenn für das Ideal J von Aufgabe 2 auf Blatt 9 gelte $\#V(J) = 1$. Widerlege dies, indem Du $\#V(P)$ und $\#V(F)$ in Singular berechnest, wobei auch P und F definiert seien wie in Aufgabe 2 auf Blatt 9.

Hinweis: Beachte, dass du in Singular explizit angeben musst, wenn du die Erzeuger von P und F als Elemente eines Unterrings auffassen willst. Der Befehl `map` hilft hierbei.

Bei allen Aufgaben soll die Relation R gegeben sein durch die Matrix

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Abgabe bis Freitag, den 17. Januar 2020, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Die Singular-Codes müssen zusätzlich per Email bis Freitag, den 17. Januar 2020, 23:59 Uhr an `alexander.taveira-blomenhofer@uni.kn` **geschickt werden.**