Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Polynomialen Optimierung

Dieses Blatt setzt Aufgabe 3 auf dem zweiten und dritten Übungsblatt sowie das zweite Programmierübungsblatt fort. Wieder seien also $k, t \in \mathbb{N}_0$ und R eine Relation auf $\{1, \dots, k\}$ mit den bekannten Interpretationen.

Aufgabe 1 (15 Punkte). Sherali und Adams wollen die Firma Seefraß grundlegend reformieren. Künftig sollen neue Mitarbeiter nur noch eingestellt werden, wenn sie einen Bachelor in Mathematik haben. Als Sofortmaßnahme geben Sherali und Adams ein verpflichtendes Wochenendseminar zum Thema "Mathematical Gastronomy" auf der Ebene K5. Am Samstag spricht Sherali über Polynome. Im ersten Teil seiner Präsentation führt er den Polynomring

$$\mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_{is} \mid 1 \le i \le k, 1 \le s \le t]$$

in $k \cdot t$ Variablen sowie die Vektorräume $\mathbb{R}[\underline{X}]_d := \{p \in R \mid \deg p \le d\}$ für $d \in \mathbb{N}_0$ ein. Am Nachmittag spricht er über die Dualräume $\mathbb{R}[\underline{X}]_d^*$ der Vektorräume $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$. Am Sonntagvormittag geht nun Adams zunächst ausführlich auf die folgenden Mengen von Polynomen und deren Bedeutung in der modernen Massengastronomie ein:

$$\begin{aligned} F :=& \{X_{is} \mid 1 \le i \le k, 1 \le s \le t\} \cup \\ & \{2 - \sum_{i=1}^{k} X_{is} \mid 1 \le s \le t\} \cup \\ & \left\{ \sum_{u=1}^{s-1} X_{iu} - \sum_{u=1}^{s} X_{ju} \mid (i,j) \in R, 1 \le s \le t \right\} \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_1, \\ G :=& \left\{ \sum_{s=1}^{t} X_{is} - 1 \mid 1 \le i \le k \right\} \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_1 \qquad \text{und} \\ H :=& \{X_{is} - X_{is}^2 \mid 1 \le i \le k, 1 \le s \le t\} \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_2. \end{aligned}$$

Im dritten Teil seines Vortrags führt er für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]$ die Menge

$$E^{\mathrm{SA}} := \{X_{is}p \mid p \in E, 1 \le i \le k, 1 \le s \le t\} \cup \{(1 - X_{is})p \mid p \in E, 1 \le i \le k, 1 \le s \le t\}.$$

ein.

(a) Erkläre, wieso man das LP aus Aufgabe 3(e) von Blatt 2 mit Zielfunktion $\ell \in \mathbb{R}[\underline{X}]_1$ (zum Beispiel $\ell = 0$) wie folgt schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LP}_{k,t,R}) \qquad & \text{minimiere } L(\ell) \\
& \text{über alle } L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_1^* \\
& \text{mit } L(1) = 1, \\
& \quad L(F) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und} \\
& \quad L(G) \subseteq \{0\}.
\end{aligned}
$$

(b) Erkläre, wieso man das LP von Programmierübungsblatt 2(e) wie folgt schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SA}_{k,t,R}) \qquad & \text{minimiere } L(\ell) \\
& \text{über alle } L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_2^* \\
& \text{mit } L(1) = 1, \\
& \quad L(F^{\mathrm{SA}}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}, \\
& \quad L(G^{\mathrm{SA}}) \subseteq \{0\} \text{ und} \\
& \quad L(H) \subseteq \{0\}.
\end{aligned}
$$

(c) Erkläre, wieso man das zu $(\mathrm{LP}_{k,t,R})$ duale LP wie folgt schreiben kann:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LP}^{\mathrm{dual}}_{k,t,R}) \qquad & \text{maximiere } \mu \\
& \text{über alle } \mu \in \mathbb{R}, \alpha_{is} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \beta_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \gamma_{ijs} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \delta_i \in \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (1 \leq i, j \leq k, 1 \leq s \leq t) \\
& \text{mit } \ell - \mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} \alpha_{is} X_{is} + \sum_{s=1}^{t} \beta_s \left(2 - \sum_{i=1}^{k} X_{is} \right) + \\
& \qquad \sum_{\substack{s=1 \\ (i,j) \in R}}^{t} \gamma_{ijs} \left(\sum_{u=1}^{s-1} X_{iu} - \sum_{u=1}^{s} X_{ju} \right) + \\
& \qquad \sum_{i=1}^{k} \delta_i \left(\sum_{s=1}^{t} X_{is} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Locker formuliert kann man das auch so ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LP}^{\mathrm{dual}}_{k,t,R}) \qquad & \text{maximiere } \mu \\
& \text{über alle } \mu \in \mathbb{R}, \\
& \qquad \text{nichtnegativen Linearkombinationen } f \text{ der Polynome aus } F \text{ und} \\
& \qquad \text{Linearkombinationen } g \text{ der Polynome aus } G \\
& \text{mit } \ell - \mu = f + g.
\end{aligned}
$$

(d) Erkläre, wieso man das zu $(\mathrm{SA}_{k,t,R})$ duale LP locker formuliert wie folgt schreiben kann:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{SA}^{\mathrm{dual}}_{k,t,R}) & \text{maximiere } \mu & \\
& \text{über alle } \mu \in \mathbb{R}, & \\
& & \text{nichtnegativen Linearkombinationen } f \text{ der Polynome aus } F^{\mathrm{SA}}, \\
& & \text{Linearkombinationen } g \text{ der Polynome aus } G^{\mathrm{SA}} \text{ und} \\
& & \text{Linearkombinationen } h \text{ der Polynome aus } H \\
& \text{mit } \ell - \mu = f + g + h. &
\end{array}
$$

(e) Im Beispielszenario $k = 6$ und $R = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$ macht der Boss Druck: Er möchte unbedingt, dass Franz und Sepp einen Plan aufstellen, der nur drei Tage benötigt. Er droht ihnen mit der sofortigen Kündigung, falls sie keinen solchen Plan finden. Sepp bittet Adams um Hilfe. Dieser weiß zunächst auch nicht, wie man den dummen Chef davon überzeugen könnte, dass es keinen dreitägigen Plan gibt. Den Beweis von Aufgabe 3(a) auf Blatt 2 hatte der Chef nämlich partout nicht verstanden. Adams konsultiert Sherali, der in der Vorlesung von Doktor Schweighofer sehr gut aufgepasst hat. Dieser sagt, Franz und Sepp sollten mit Hilfe der starken Dualität der linearen Optimierung für ein geeignetes ℓ eine geeignete zulässige Lösung von $(\mathrm{SA}^{\mathrm{dual}}_{k,3,R})$ finden und sie dem Boss auf einem Blatt Papier präsentieren. Franz und Sepp wenden sich immer noch etwas irritiert an Dich. Erkläre Franz und Sepp,

- was Sherali gemeint haben könnte,
- wie man ℓ am besten wählt,
- zu welchem Wert von μ man eine zulässige Lösung von $(\mathrm{SA}^{\mathrm{dual}}_{k,t,R})$ suchen sollte und
- warum dies den Chef davon abhalten sollte, Franz und Sepp auf das Arbeitsamt zu schicken.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Der Chef ist in heller Aufregung: Der `list_schedule`-Algorithmus läuft immer noch nicht fehlerfrei. Daher soll bei Seefraß in der kommenden Woche statt eines echten Plans nur ein gebrochener Plan zum Einsatz kommen. Immerhin handelt es sich um einen Sherali-Adams-Plan $x \in S^{\mathrm{SA}}_{k,t,R}$. Als würde das noch nicht genug Probleme verursachen, hat auch noch Ola Svensson, der Direktor des schwedischen Mutterkonzerns, kurzfristig eine persönliche Qualitätsinspektion am Tag 3 angekündigt. Der Chef möchte daher an Tag 3 Svenssons Lieblingsgericht zu 100% frisch zubereiten, um ihn milde zu stimmen: „Italienische Köttbullar an Mango-Aiyvar-Chutney (vegetarisch, ohne Mango: vegan)“. Dieses Gericht entspricht Aufgabe 1. Gemäß des Plans x wäre nur ein kleiner Bruchteil $x_{13} > 0$ von Gericht 1 am Tag 3 produziert worden. Sherali und Adams werden nervös und kommen nach einem langen Spaziergang auf der Mainau mit folgenden Ideen:

(a) Sei L eine zulässige Lösung von $(\mathrm{SA}_{k,t,R})$ und $(i,s) \in \{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,t\}$ mit $L(X_{is}) > 0$. Zeige, dass dann

$$L' \colon \mathbb{R}[\underline{X}]_1 \to \mathbb{R},\ p \mapsto \frac{L(X_{is}p)}{L(X_{is})}$$

eine zulässige Lösung von $(\mathrm{LP}_{k,t,R})$ mit $L'(X_{is}) = 1$ ist.

(b) Zeige, dass man mittels (a) aus dem gebrochenen Plan x einen neuen gebrochenen Plan $y \in S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ erhält, der Svensson milde stimmt.

(c) Der Chef ist etwas beruhigt, hat aber einen Einwand: Manche Gerichte könnten nur vom Chefkoch zubereitet werden. Dieser hätte aber während der Woche einen Zahnarzttermin und kann deshalb an dem entsprechenden Tag nicht da sein. Im Plan x war das bereits berücksichtigt, beim Plan y sei das aber nun nicht mehr gesichert, behauptet der Chef. Ohne zu fragen, wann der Zahnarzttermin ist, behauptet Adams, dass das mit Sicherheit kein Problem wäre, denn es würde

$$x_{is} = 0 \implies y_{is} = 0$$

für alle $(i,s) \in \{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,t\}$ gelten. Warum?

Abgabe bis Freitag, den 7. Juni 2019, um 9:59 Uhr in die Zettelkästen neben F411.