Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Die Elemente der abelschen Gruppe $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ aller Funktionen $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to R$ kann man als „unendliche Matrizen“ über R auffassen. Damit bei der noch zu definierenden „Matrizenmultiplikation“ keine unendlichen Summen auftauchen, betrachten wir die Untergruppe S von $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, die aus allen Funktionen $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to R$ besteht, deren Zeilen $A(i,.)$ $(i \in \mathbb{N})$ alle einen endlichen Träger $\{j \in \mathbb{N} \mid A(i,j) \neq 0\}$ haben und deren Spalten $A(.,j)$ $(j \in \mathbb{N})$ ebenfalls alle einen endlichen Träger $\{i \in \mathbb{N} \mid A(i,j) \neq 0\}$ haben.

(a) Zeige, dass für $A, B \in S$ das Produkt AB erklärt durch

$$(AB)(i,k) := \sum_{j\in\mathbb{N}} A(i,j)B(j,k) \qquad (i,k \in \mathbb{N})$$

wieder in S liegt.

(b) Zeige, dass durch die so definierte Multiplikation S zu einem Ring wird.

(c) Für jede solche „Matrix“ $A \in S$ bezeichne $A_1 \in S$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller geraden Spalten hervorgeht, und $A_2 \in S$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller ungeraden Spalten hervorgeht. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon S \to S^2,\ A \mapsto (A_1, A_2)$$

ein S-Modulisomorphismus ist.

(d) In R gebe es genau zwei Elemente a mit $a^2 = a$ (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn R ein Körper ist). Zeige, dass die Ringe S und S^2 nicht isomorph sind.

Abgabe bis Mittwoch, den 24. April 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.