Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Welcher der folgenden Moduln hat die Eigenschaft, dass alle seine Untermoduln frei sind?

(a) Der Polynomring $\mathbb{R}[X]$ als Modul über sich selbst.

(b) Der Polynomring $\mathbb{R}[X, Y]$ als Modul über sich selbst.

(c) Der Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Modul über sich selbst.

(d) Der Ring $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen als Modul über sich selbst.

Aufgabe 2. Sei A ein Ring und L ein Untermodul des A-Moduls A mit $0 \neq L \neq A$.

(a) Zeige unter der Voraussetzung, dass kein Untermodul des A-Moduls A echt zwischen L und A liegt, dass der A-Modul A/L nicht frei ist.

(b) Zeige, dass (a) auch ohne die genannte Voraussetzung gilt, wenn der Ring A kommutativ ist.

(c) Finde ein Beispiel für A und L, für das (a) ohne die genannte Voraussetzung nicht gilt.

Aufgabe 3. Sei A ein Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Jeder A-Modul ist frei.

(b) Jeder Quotient des A-Moduls A ist frei.

(c) In A besitzt jedes von 0 verschiedene Element ein Linksinverses, das heißt

$$\forall a \in A \setminus \{0\} : \exists b \in A : ba = 1.$$

(d) In A besitzt jedes von 0 verschiedene Element ein Rechtsinverses, das heißt

$$\forall a \in A \setminus \{0\} : \exists b \in A : ab = 1.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Mai 2019, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.