Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2020

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring, $a \in R$ und $S := \{a^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Sei T eine Unbestimmte über R. Zeige, dass

$$S^{-1}R \cong R[T]/(Ta-1)$$

eine Isomorphie von kommutativen Ringen ist.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige:

(a) Ist $S \subseteq R$ multiplikativ und $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln N und M, so ist $\ker(S^{-1}f) = S^{-1}\ker f$ und $\operatorname{im}(S^{-1}f) = S^{-1}\operatorname{im} f$.

(b) Eine Sequenz von R-Moduln ist $\left\{\begin{matrix}\text{halbexakt}\\ \text{exakt}\end{matrix}\right\}$ genau dann, wenn für alle $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max}$ die nach $\mathfrak{m}$ lokalisierte Sequenz von $R_{\mathfrak{m}}$-Moduln $\left\{\begin{matrix}\text{halbexakt}\\ \text{exakt}\end{matrix}\right\}$ ist.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und seien I und J Ideale von R. Zeige: I und J sind genau dann koprim (das heißt $1 \in I + J$), wenn die Ideale $I_{\mathfrak{m}}$ und $J_{\mathfrak{m}}$ von $R_{\mathfrak{m}}$ für jedes $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max}$ koprim sind.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ. Seien M und N R-Moduln.

(a) Begründe anhand der Vorlesung, warum es einen natürlichen Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln

$$\Phi\colon S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

gibt und beschreibe ihn möglichst explizit.

(b) Zeige, dass Φ ein Isomorphismus ist, wenn M frei von endlichem Rang ist.

(c) Finde ein Beispiel für R, S, M und N, für welches Φ kein Isomorphismus ist.

Abgabe bis Freitag, den 15. Mai, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.