Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen der Form

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

gegeben, in dem alle Zeilen und Spalten exakt sind. Zeige, dass f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2. Sei R ein lokaler kommutativer Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und M ein e.e. R-Modul. Zeige mit Hilfe des Nakayama-Lemmas und linearer Algebra die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $M \neq 0$

(b) Es gibt eine exakte Sequenz $M \to R/\mathfrak{m} \to 0$ von R-Moduln.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ. Sei M ein endlich präsentierbarer R-Modul (vergleiche Aufgabe 3 auf Blatt 4). Zeige mit Hilfe von Aufgabe 1 auf diesem Blatt, Aufgabe 4 auf Blatt 3 sowie den Aufgaben 3 und 5 auf Blatt 4, dass der kanonische Homomorphismus

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Seien M und N R-Moduln. Sei weiter M endlich erzeugt. Zeige:

$$\operatorname{ass}(\operatorname{Hom}(M,N)) = (\operatorname{supp} M) \cap (\operatorname{ass} N)$$

Hinweis. Ziehe Dich mit Hilfe von 2.2.10 und 2.2.15 (beziehungsweise 2.2.16) sowie mit Aufgabe 3 auf den Fall zurück, dass R lokal ist. Für „$\supseteq$“ benutze 2.2.4(a) und Aufgabe 2.

Abgabe bis Freitag, den 29. Mai, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.