Ensembles semi-algébriques convexes, inégalités matricielles linéaires et sommes de carrés

Markus Schweighofer

Université de Rennes 1

Colloquium
Institut de Mathématiques de Bordeaux
11 décembre 2008

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t \times t}$.

$$A \succeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ semidéfinie positive}$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

$$\begin{aligned} A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive} \\ &\iff \quad \langle Av, v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \end{aligned}$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

$$
\begin{aligned}
A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive}\\
&\iff \quad \langle Av, v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t\\
&\iff \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geq 0
\end{aligned}
$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

$$\begin{aligned} A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive} \\ &\iff \quad \langle Av, v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \\ &\iff \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geq 0 \\ &\iff \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont } \geq 0 \end{aligned}$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

$$\begin{aligned}
A \succeq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ semidéfinie positive} \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle Av, v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \det((A_{ij})_{i,j\in J}) \geq 0 \text{ pour tout } J \subseteq \{1,\ldots,t\}
\end{aligned}$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t \times t}$.

$$
\begin{aligned}
A \succ 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ } \cancel{\text{semi}}\text{définie positive} \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle Av, v \rangle > 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \setminus \{0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont } > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \det((A_{ij})_{i,j \in J}) > 0 \text{ pour tout } J \subseteq \{1, \ldots, t\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det((A_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,k\}}) > 0 \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, t\}
\end{aligned}
$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t \times t}$.

$$\begin{aligned} A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive} \\ &\iff \quad \langle Av, v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \setminus \{0\} \\ &\iff \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geq 0 \\ &\iff \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont } > 0 \\ &\iff \quad \det((A_{ij})_{i,j \in J}) \geq 0 \text{ pour tout } J \subseteq \{1, \ldots, t\} \end{aligned}$$

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

$$\begin{aligned}
A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive} \\
&\iff \quad \langle Av,v\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \setminus \{0\} \\
&\iff \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geq 0 \\
&\iff \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont } > 0 \\
&\iff \quad \det((A_{ij})_{i,j\in J}) \geq 0 \text{ pour tout } J \subseteq \{1,\ldots,t\}
\end{aligned}$$

On appelle IML une inégalité de la forme

$$A(x) := A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n \succeq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

avec $A_0,\ldots,A_n \in S\mathbb{R}^{t\times t}$.

Inégalités matricielles linéaires (IML)

Soit $A \in S\mathbb{R}^{t \times t}$.

$$
\begin{aligned}
A \succeq 0 \quad &\iff \quad A \text{ semidéfinie positive} \\
&\iff \quad \langle Av, v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^t \setminus \{0\} \\
&\iff \quad \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont } \geq 0 \\
&\iff \quad \text{tous les coefficients de } \det(A + TI_t) \in \mathbb{R}[T] \text{ sont } > 0 \\
&\iff \quad \det((A_{ij})_{i,j \in J}) \geq 0 \text{ pour tout } J \subseteq \{1, \dots, t\}
\end{aligned}
$$

On appelle IML une inégalité de la forme

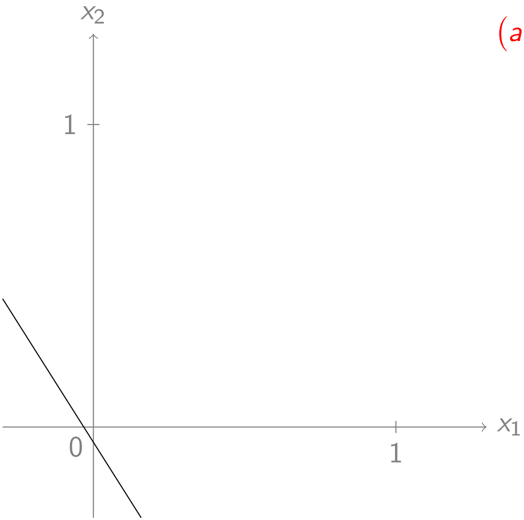
$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \succeq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

avec $A_0, \dots, A_n \in S\mathbb{R}^{t \times t}$.
Cette inégalité correspond à la famille des inégalités linéaires

$$\langle A(x)v, v \rangle \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

paramétrée par $v \in \mathbb{R}^n$.

Inégalités matricielles linéaires (IML)

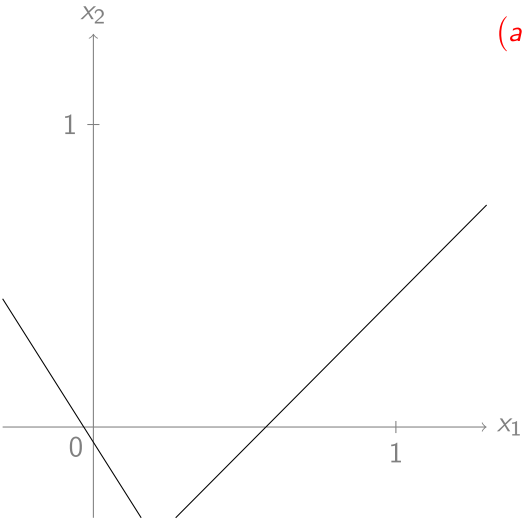


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

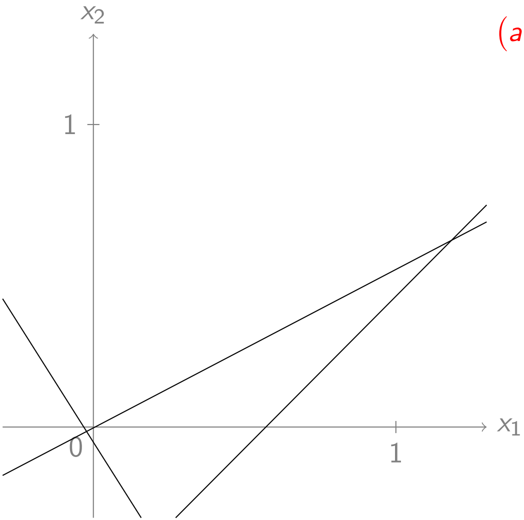


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

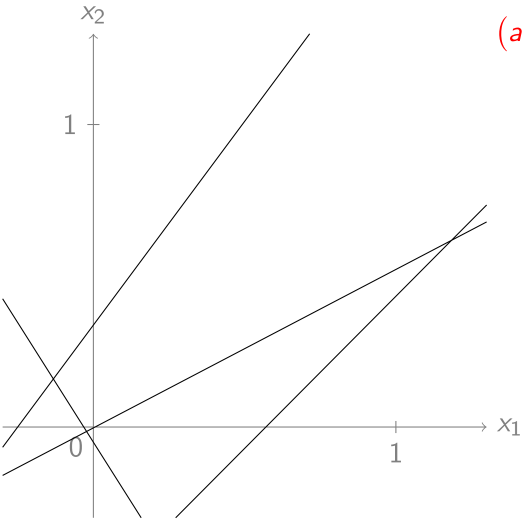
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

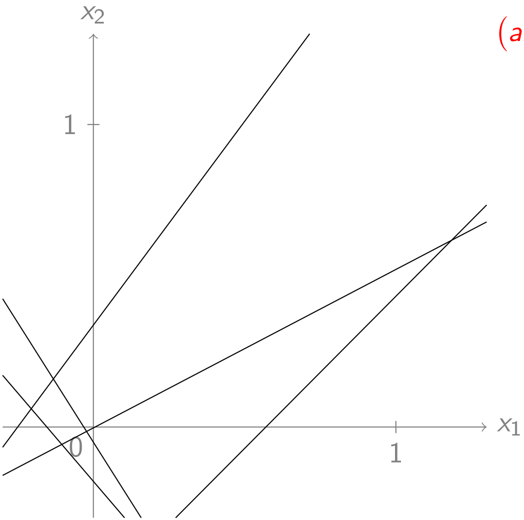


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

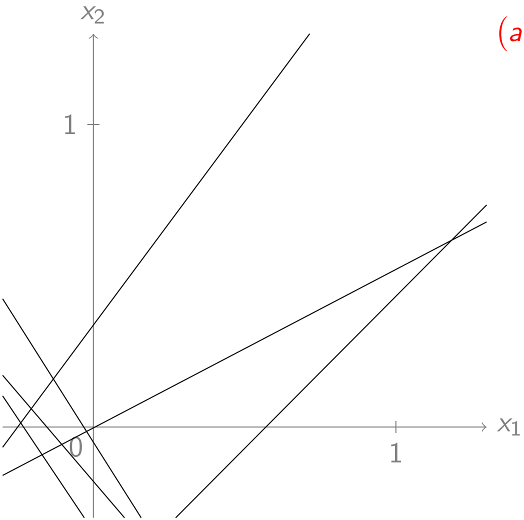
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

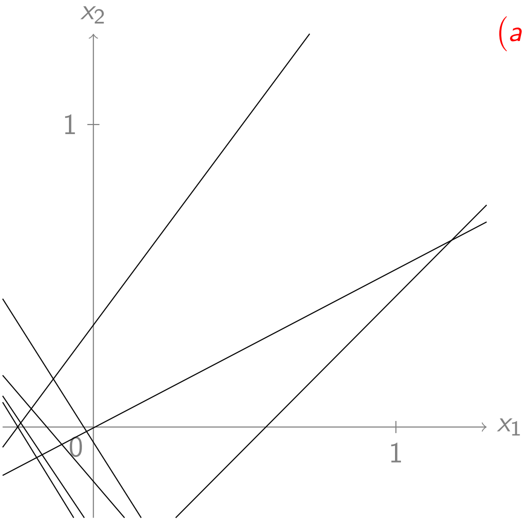
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

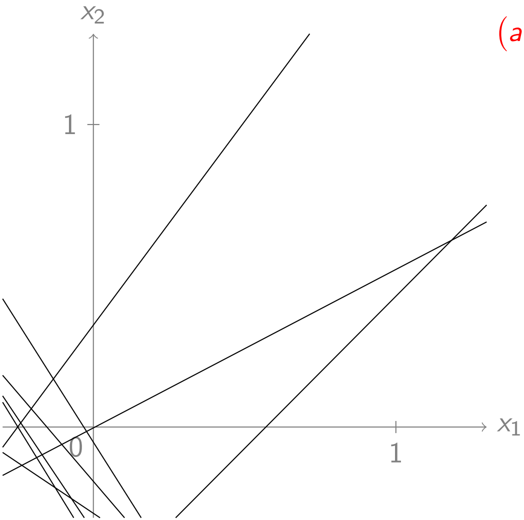


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

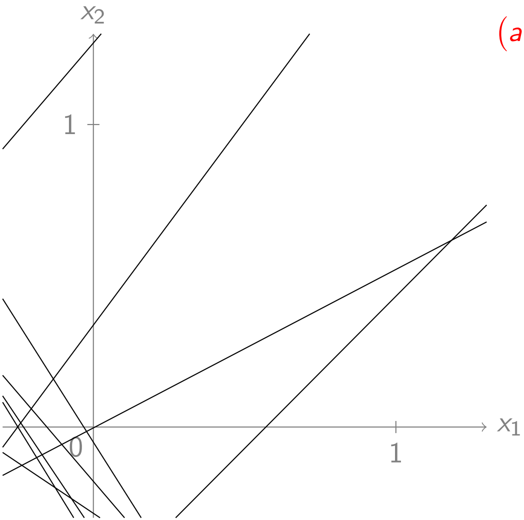


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

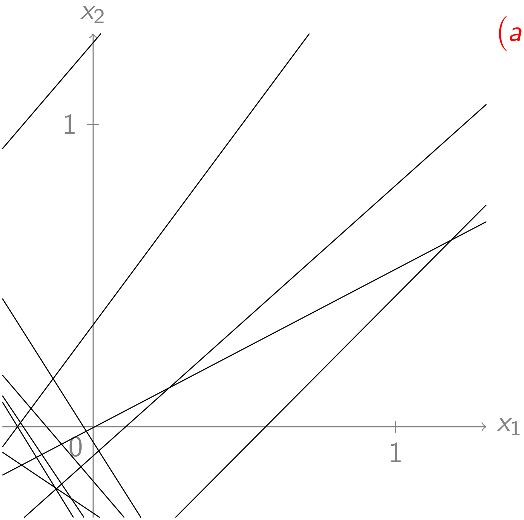


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

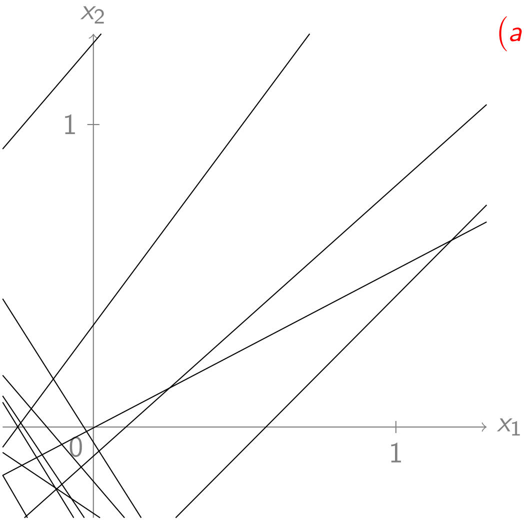
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

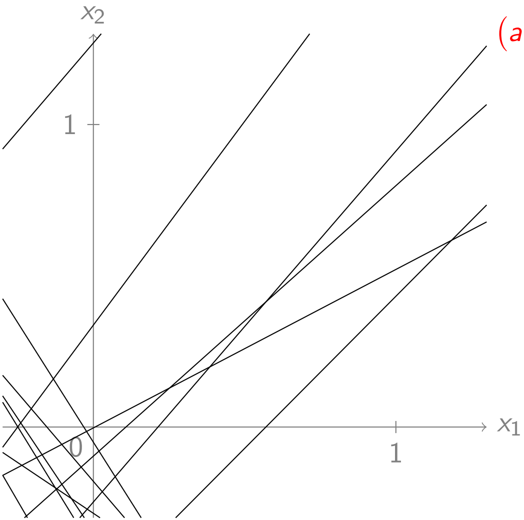


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

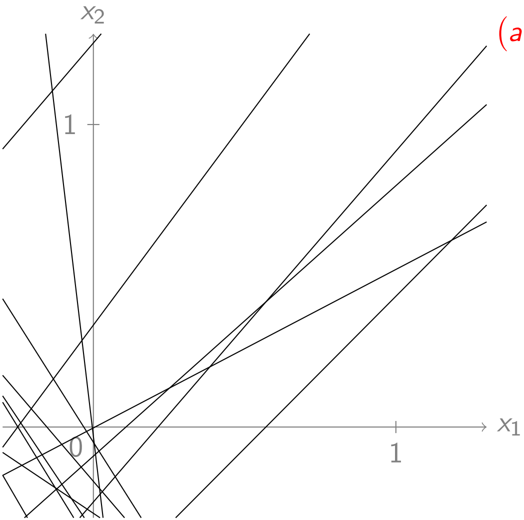


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

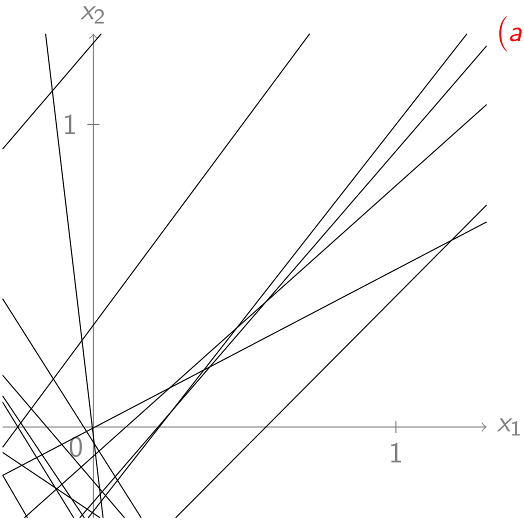
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

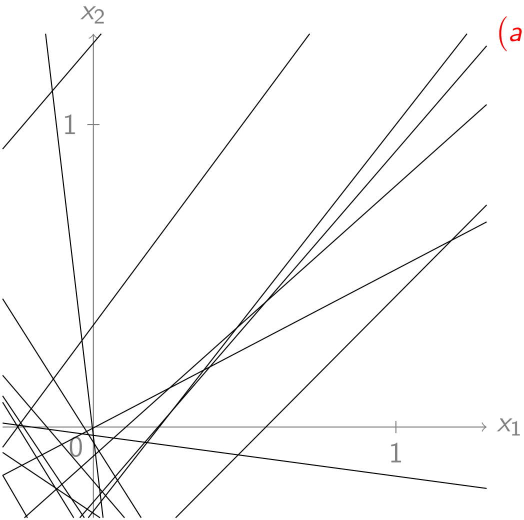


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

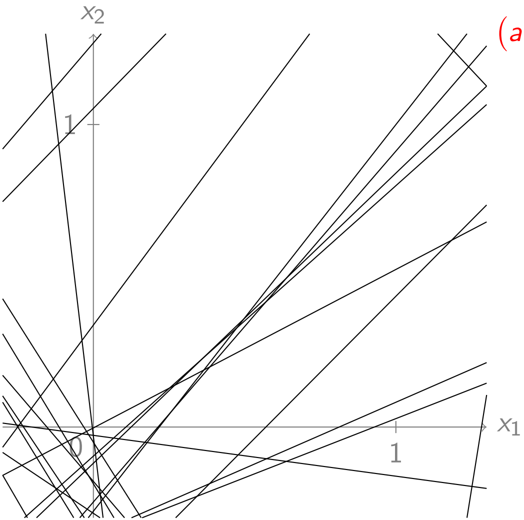
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

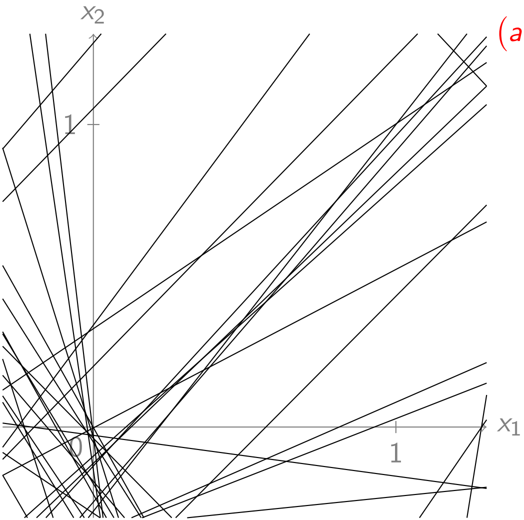
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

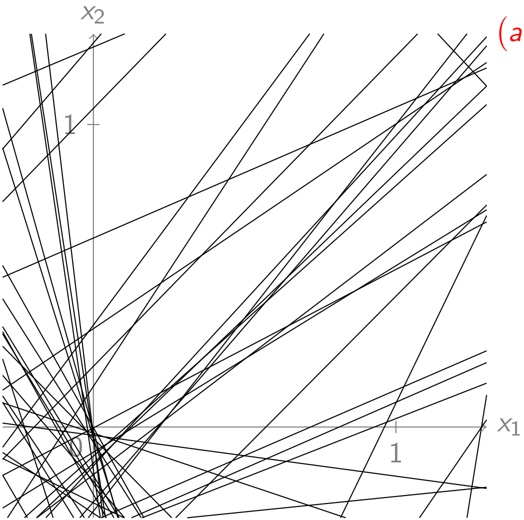


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

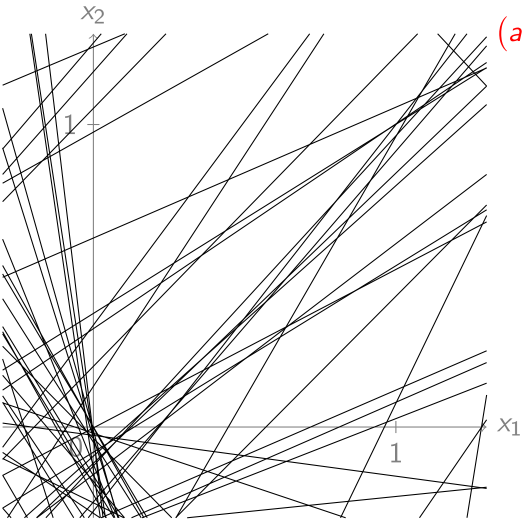
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

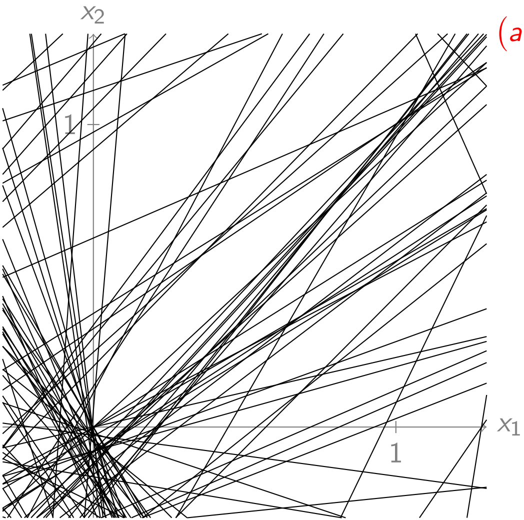


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

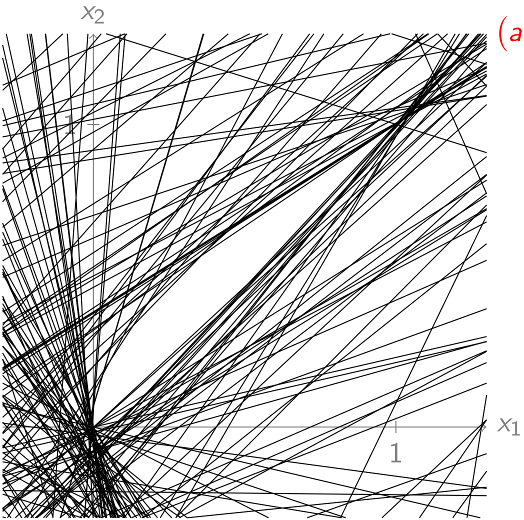
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

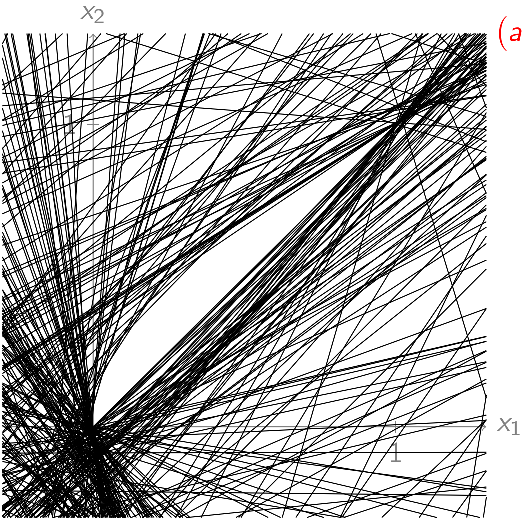
Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

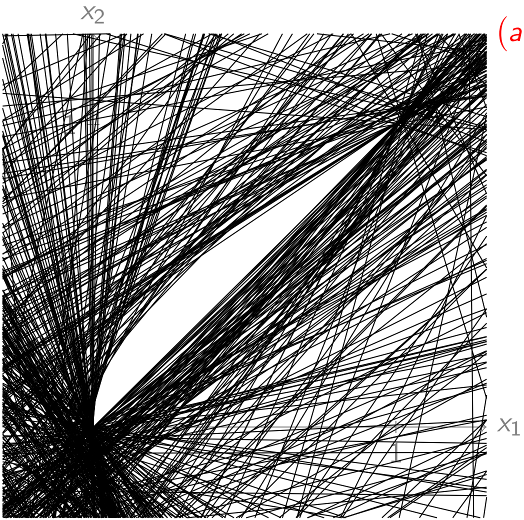


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

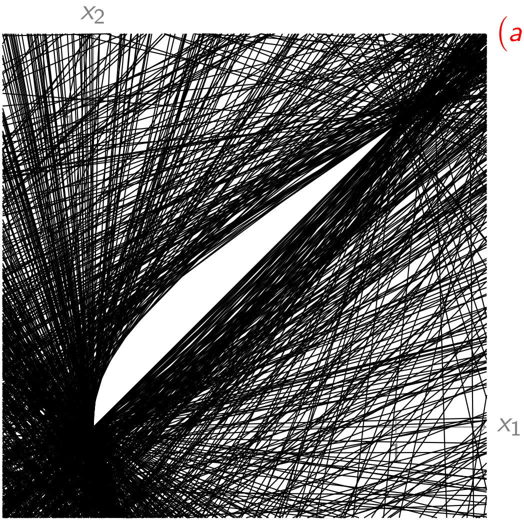


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

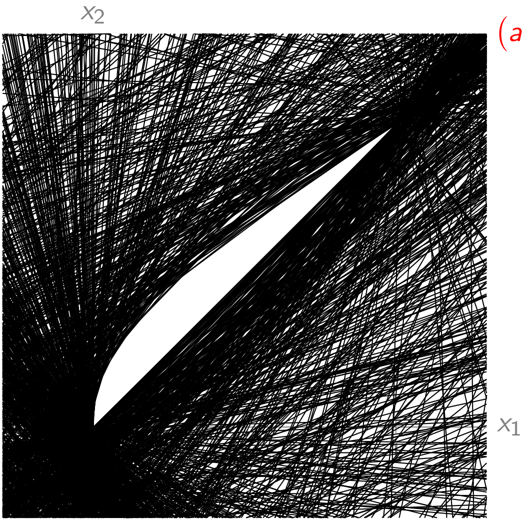


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalités matricielles linéaires (IML)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants

et distribués normalement

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$,

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\},$$

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\},$$

- toutes les faces de S sont exposées.

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\},$$

- toutes les faces de S sont exposées.

En effet, si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$, alors on peut montrer que les faces de S sont les ensembles

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0,\ldots,g_m(x) \geq 0\},$$

- toutes les faces de S sont exposées.

En effet, si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$, alors on peut montrer que les faces de S sont les ensembles $\{x \in S \mid U \subseteq \ker A(x)\}$ où U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\},$$

- toutes les faces de S sont exposées.

En effet, si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$, alors on peut montrer que les faces de S sont les ensembles $\{x \in S \mid U \subseteq \ker A(x)\}$ où U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais si $U = \mathbb{R}u_1 + \dots + \mathbb{R}u_k$, alors

$$\{x \in S \mid U \subseteq \ker A(x)\} =$$

Spectraèdres et leurs propriétés

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S et on dit que S est un spectraèdre.

Soit S un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un fermé semi-algébrique de base, c.-à-d. il existent $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\},$$

- toutes les faces de S sont exposées.

En effet, si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \succeq 0\}$, alors on peut montrer que les faces de S sont les ensembles $\{x \in S \mid U \subseteq \ker A(x)\}$ où U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais si $U = \mathbb{R}u_1 + \dots + \mathbb{R}u_k$, alors

$$\{x \in S \mid U \subseteq \ker A(x)\} = \{x \in S \mid \langle A(x)u_1, u_1\rangle + \dots + \langle A(x)u_k, u_k\rangle = 0\}.$$

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées mais on verra qu'il n'est pas un spectraèdre.

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées mais on verra qu'il n'est pas un spectraèdre.

La raison est qu'il n'est pas rigidement convexe.

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées mais on verra qu'il n'est pas un spectraèdre.

La raison est qu'il n'est pas rigidement convexe.

Tout spectraèdre non-vide est rigidement convexe dans son enveloppe affine. La réciproque est une conjecture.

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées mais on verra qu'il n'est pas un spectraèdre.

La raison est qu'il n'est pas rigidement convexe.

Tout spectraèdre non-vide est rigidement convexe dans son enveloppe affine. La réciproque est une conjecture.

Un ensemble convexe non-vide est toujours d'intérieur non-vide dans son enveloppe affine. Donc on peut reformuler:

Vers une caractérisation des spectraèdres

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$ est un convexe fermé semi-algébrique de base dont toutes les faces sont exposées mais on verra qu'il n'est pas un spectraèdre.

La raison est qu'il n'est pas rigidement convexe.

Tout spectraèdre non-vide est rigidement convexe dans son enveloppe affine. La réciproque est une conjecture.

Un ensemble convexe non-vide est toujours d'intérieur non-vide dans son enveloppe affine. Donc on peut reformuler:

Un spectraèdre d'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La réciproque est une conjecture.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi?

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\colon \forall \lambda \in \mathbb{C}\colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 \quad = \quad p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x))$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\colon \forall \lambda \in \mathbb{C}\colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} 0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\ &= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)) \end{aligned}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} 0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\ &= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)) \\ &= \det(P^*(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n))P) \qquad (P \in \mathbb{R}^{t \times t}) \end{aligned}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\
&= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)) \\
&= \det(P^*(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n))P) \qquad (P \in \mathbb{R}^{t \times t}) \\
&= \det(P^* A_0 P + \lambda P^*(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)P) \quad (P^* A_0 P = I_t)
\end{aligned}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\
&= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)) \\
&= \det(P^*(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n))P) && (P \in \mathbb{R}^{t \times t}) \\
&= \det(P^* A_0 P + \lambda P^*(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)P) && (P^* A_0 P = I_t) \\
&= \det(I_t + \lambda B) && (B \in S\mathbb{R}^{t \times t})
\end{aligned}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\
&= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)) \\
&= \det(P^*(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n))P) && (P \in \mathbb{R}^{t \times t}) \\
&= \det(P^* A_0 P + \lambda P^*(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)P) && (P^* A_0 P = I_t) \\
&= \det(I_t + \lambda B) && (B \in S\mathbb{R}^{t \times t})
\end{aligned}$$

et donc $\det(B + \frac{1}{\lambda} I_t) = 0$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

Pourquoi? On se ramène au cas $x_0 = 0$. Alors on a $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ avec $A_0 \succ 0$ tel que $p = \det(A(\bar{X})) = \det(A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_n A_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} 0 &= p(x_0 + \lambda x) = p(0 + \lambda x) = \det(A(\lambda x)) \\ &= \det(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)) \\ &= \det(P^*(A_0 + \lambda(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n))P) & (P \in \mathbb{R}^{t \times t}) \\ &= \det(P^* A_0 P + \lambda P^*(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)P) & (P^* A_0 P = I_t) \\ &= \det(I_t + \lambda B) & (B \in S\mathbb{R}^{t \times t}) \end{aligned}$$

et donc $\det(B + \frac{1}{\lambda} I_t) = 0$ d'où $-\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\colon \forall \lambda \in \mathbb{C}\colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) \neq 0\}\colon S = \overline{C}}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\} \colon S = \overline{C}}$$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$.
Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\} \colon S = \overline{C}}$$

Si le degré de p est minimale, on appelle p le polynôme minimal de S (unique à un facteur $c > 0$ près).

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\} \colon S = \overline{C}}$$

Si le degré de p est minimale, on appelle p le polynôme minimal de S (unique à un facteur $c > 0$ près). Le polynôme minimal de S divise dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$ tout autre polynôme p de cette sorte.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \colon \forall \lambda \in \mathbb{C} \colon (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\} \colon S = \overline{C}}$$

Si le degré de p est minimale, on appelle p le polynôme minimal de S (unique à un facteur $c > 0$ près). Le polynôme minimal de S divise dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$ tout autre polynôme p de cette sorte. En particulier, notre spectraèdre S est rigidement convexe dans le sens suivant:

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un spectraèdre et $x_0 \in S^\circ$. Alors on peut montrer qu'il existe une représentation IML $A(x) \succeq 0$ de S tel que $A(x_0) \succ 0$. Étant donnée une telle représentation IML, soit

- $p := \det(A(\bar{X})) \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et
- C la composante connexe de x_0 dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\}$.

Alors $S = \overline{C}$ et p est un polynôme RZ en x_0 dans le sens suivant:

$$\boxed{p(x_0) > 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda \in \mathbb{C} : (p(x_0 + \lambda x) = 0 \implies \lambda \in \mathbb{R})}$$

S est un intérieur algébrique dans le sens suivant:

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}[\bar{X}] : \exists \text{ comp. connexe } C \text{ dans } \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) > 0\} : S = \overline{C}}$$

Si le degré de p est minimale, on appelle p le polynôme minimal de S (unique à un facteur $c > 0$ près). Le polynôme minimal de S divise dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$ tout autre polynôme p de cette sorte. En particulier, notre spectraèdre S est rigidement convexe dans le sens suivant:

$$\boxed{S \text{ intérieur algébrique} \quad \& \quad \exists x_0 \in S^\circ : \text{pol. min. de } S \text{ est RZ en } x_0}$$

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Théorème (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^2$ rigidement convexe est un spectraèdre.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Théorème (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^2$ rigidement convexe est un spectraèdre.

C'est une conséquence de la conjecture de Lax (1958):

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Théorème (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^2$ rigidement convexe est un spectraèdre.

C'est une conséquence de la conjecture de Lax (1958):

Conjecture de Lax (1958)
Pour tout $p \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ RZ en 0 de degré d, il existent $A_i \in S\mathbb{R}^{d\times d}$ tel que $A_0 \succ 0$ et $p = \det(A_0 + X_1A_1 + X_2A_2)$.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Théorème (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^2$ rigidement convexe est un spectraèdre.

C'est une conséquence de la conjecture de Lax (1958):

Théorème (Helton & Vinnikov 2006)
Pour tout $p \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ RZ en 0 de degré d, il existent $A_i \in S\mathbb{R}^{d \times d}$ tel que $A_0 \succ 0$ et $p = \det(A_0 + X_1 A_1 + X_2 A_2)$.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Conjecture (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ rigidement convexe est un spectraèdre.

Ça serait une conséquence de la conjecture de Lax généralisée:

Conjecture (Helton & Vinnikov 2006)
Pour tout $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ RZ en 0, il existent $t \in \mathbb{N}$ et $A_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que $A_0 \succ 0$ et $p = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Conjecture (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ rigidement convexe est un spectraèdre.

Théorème (Helton & Vinnikov 2003)
Pour tout $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, il existent $t \in \mathbb{N}$ et $A_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$
tel que $p = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.

Proposition (Gårding 1959) Si S est rigidement convexe, alors le polynôme minimale de S est RZ en tous $x_0 \in S^\circ$ et S et convexe.

On a vu qu'un spectraèdre de l'intérieur non-vide est rigidement convexe.
La première grande question de l'exposé est si la réciproque est vraie.

Conjecture (Helton & Vinnikov 2006)
Tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ rigidement convexe est un spectraèdre.

Théorème (Helton & Vinnikov 2003)
Pour tout $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, il existent $t \in \mathbb{N}$ et $A_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que $p = \det(A_0 + X_1 A_1 + \cdots + X_n A_n)$.

Nouvelle démonstration qui ne passe plus par le non commutatif et constructions explicites: Quarez 2008

Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ RZ en 0 de degré d. Alors nous appelons

$$R^k p := \frac{\partial^k}{\partial X_0^k} X_0^d \, p\left(\frac{\bar{X}}{X_0}\right)\Big|_{X_0=1}$$

la dérivée k-ième de Renegar. Elle est encore RZ en 0.

Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ RZ en 0 de degré d. Alors nous appelons

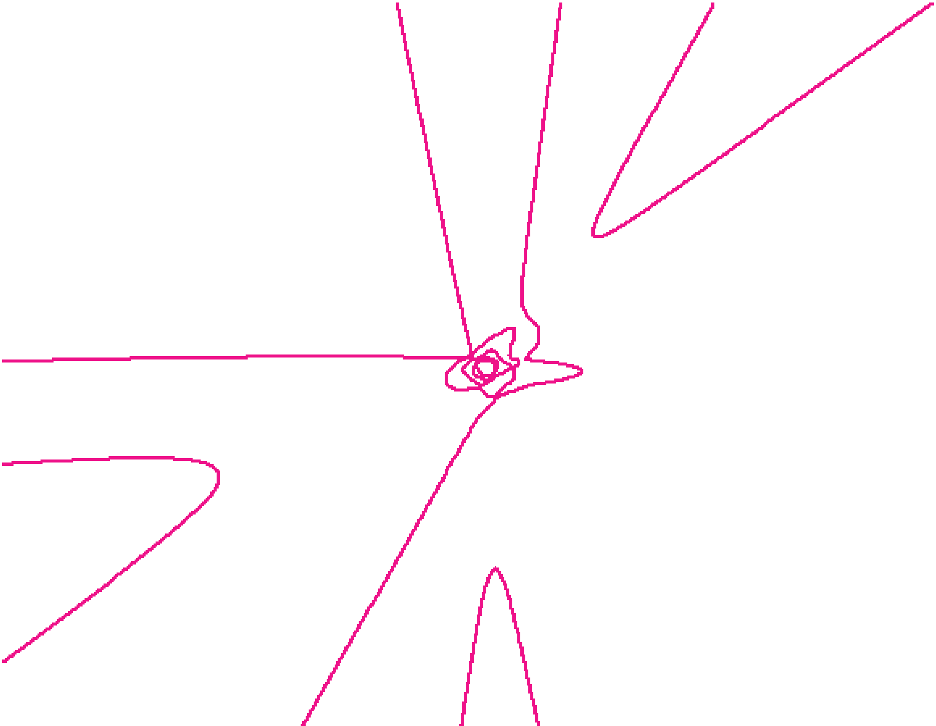
$$R^k p := \frac{\partial^k}{\partial X_0^k} \, X_0^d \; p\left(\frac{\bar{X}}{X_0}\right)\Big|_{X_0=1}$$

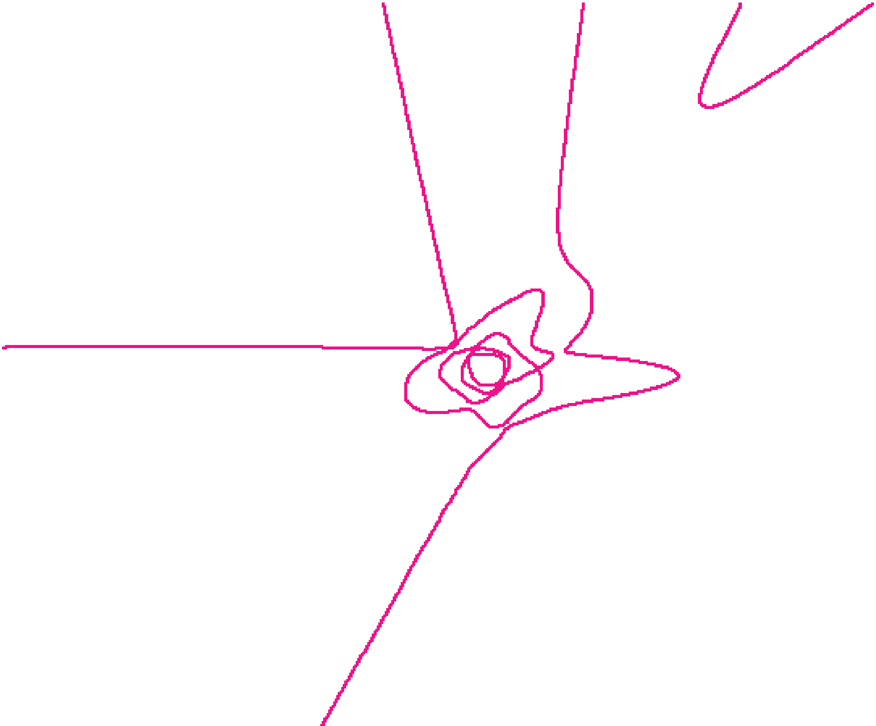
la dérivée k-ième de Renegar. Elle est encore RZ en 0.

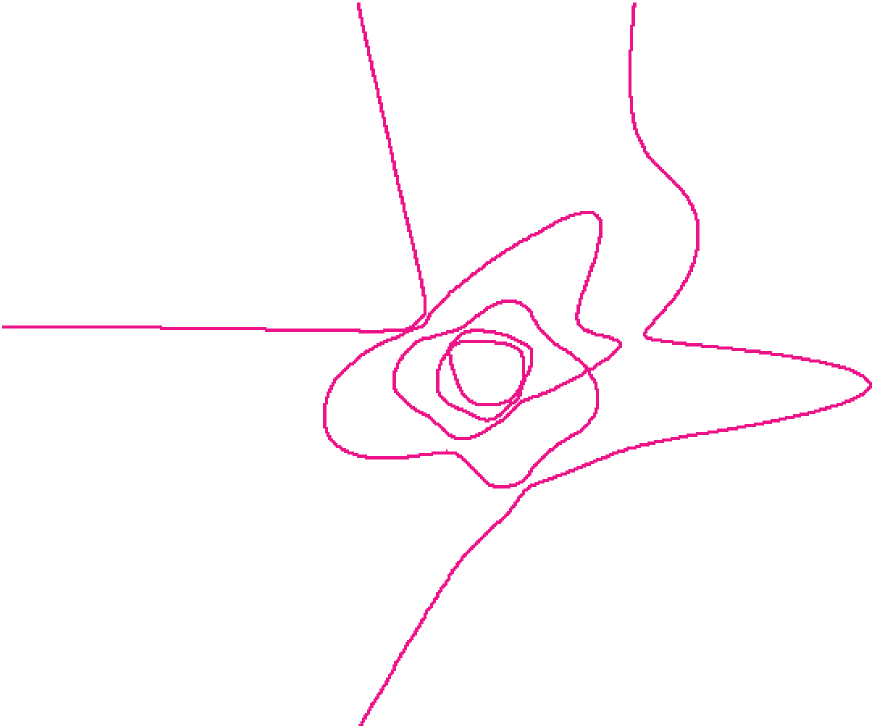
Théorème (Renegar 2005) Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ rigidement convexe avec $0 \in S^\circ$ et polynôme minimale de degré d. Alors

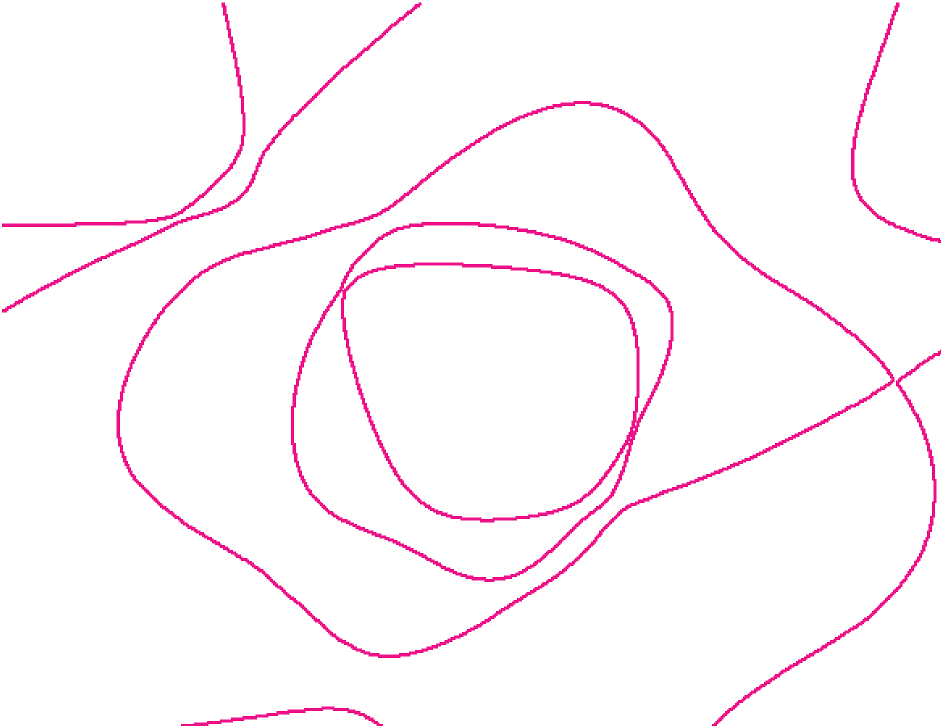
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) \geq 0, Rp(x) \geq 0, \ldots, R^{d-1}p(x) \geq 0\}$$

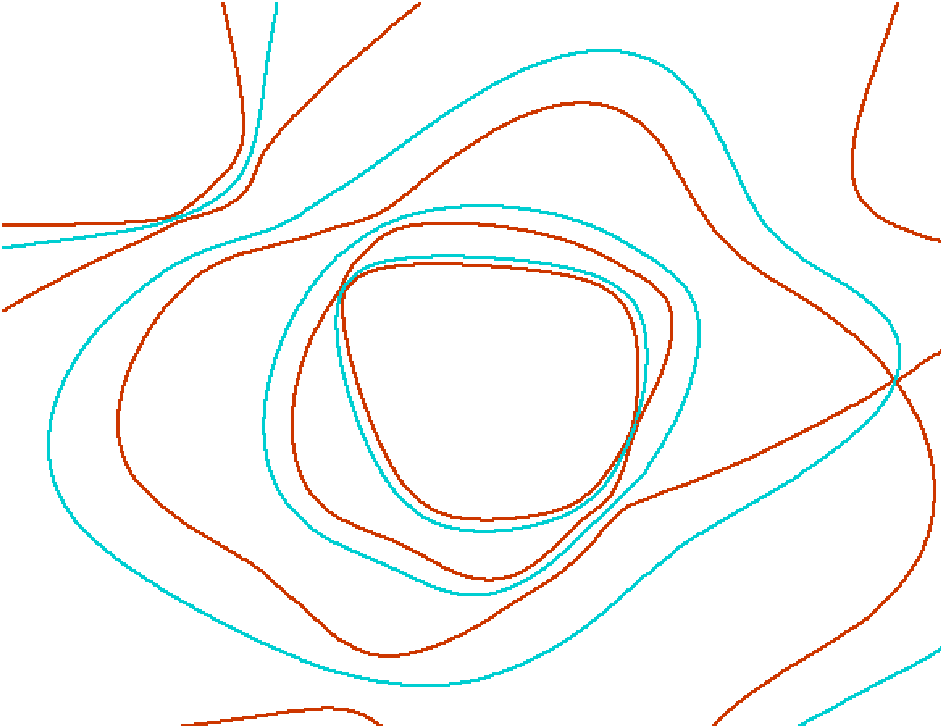
est un fermé semi-algébrique de base et toutes les faces de S sont exposées.

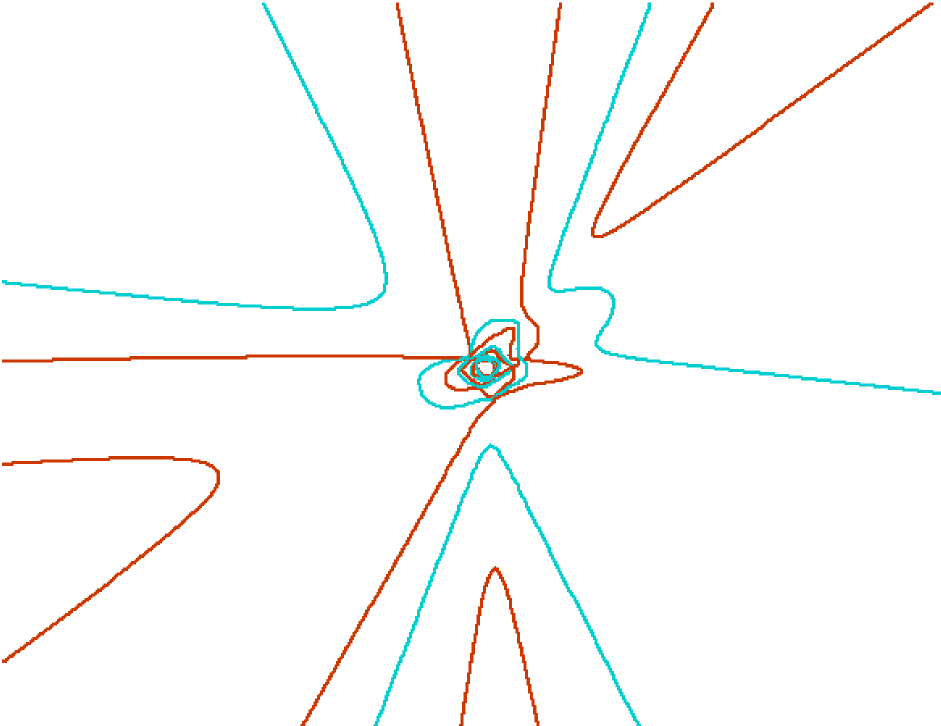


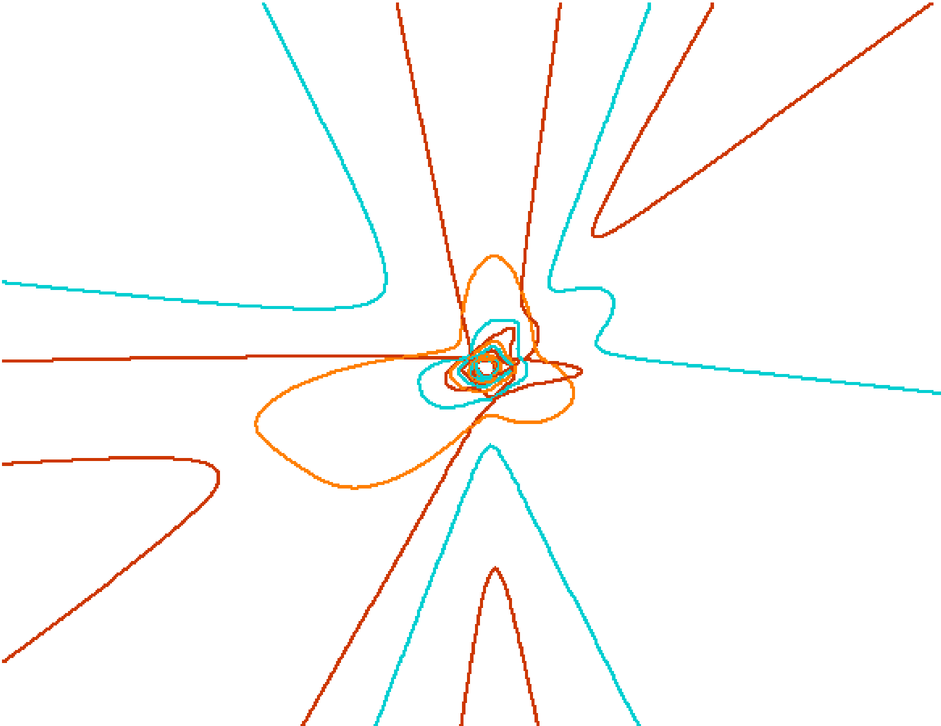


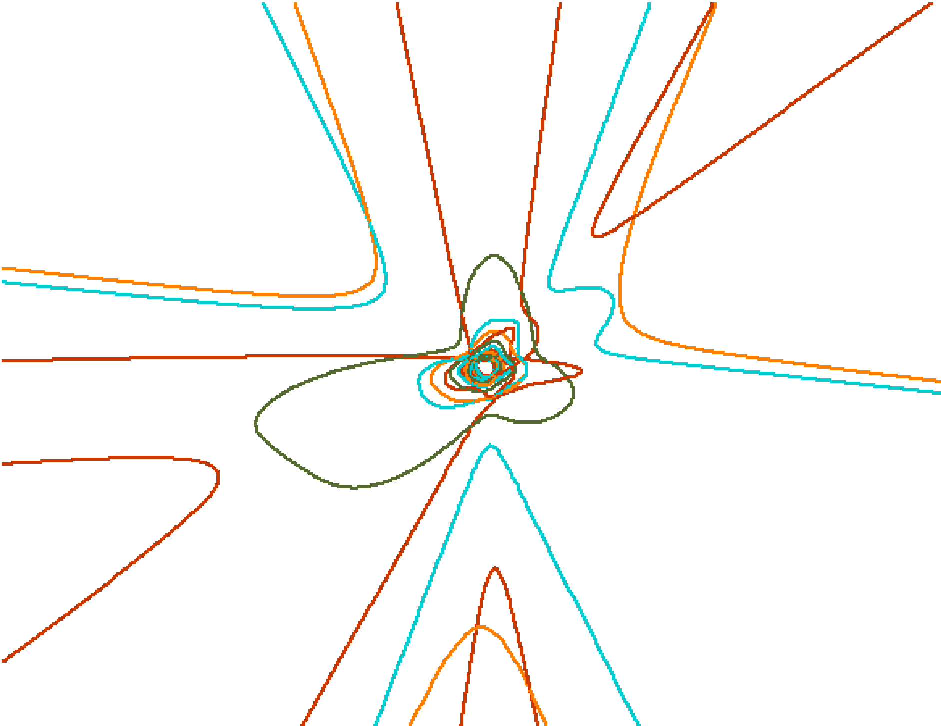


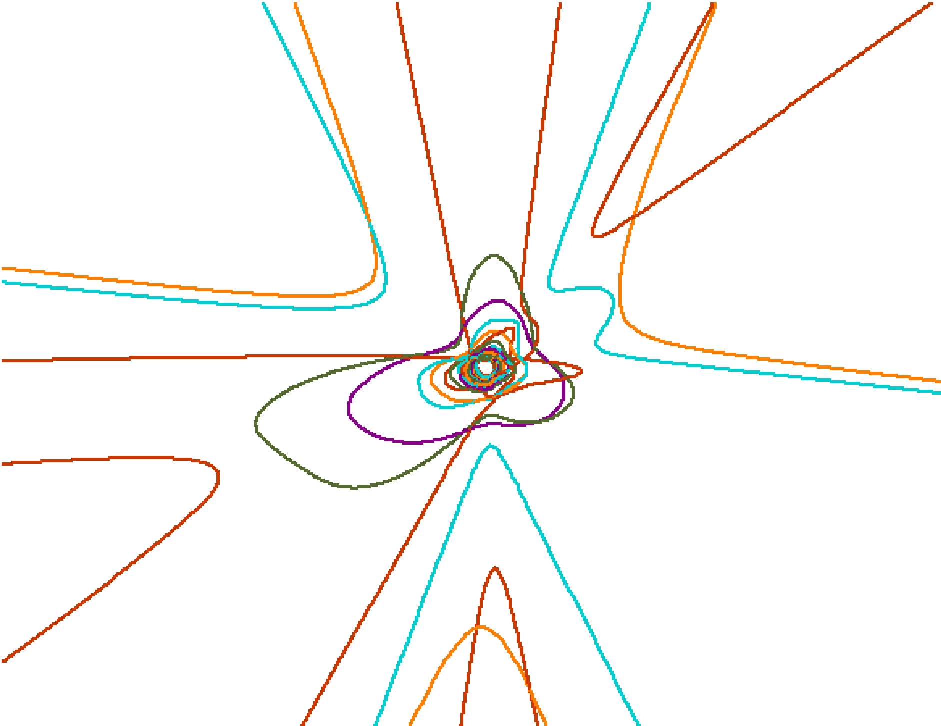


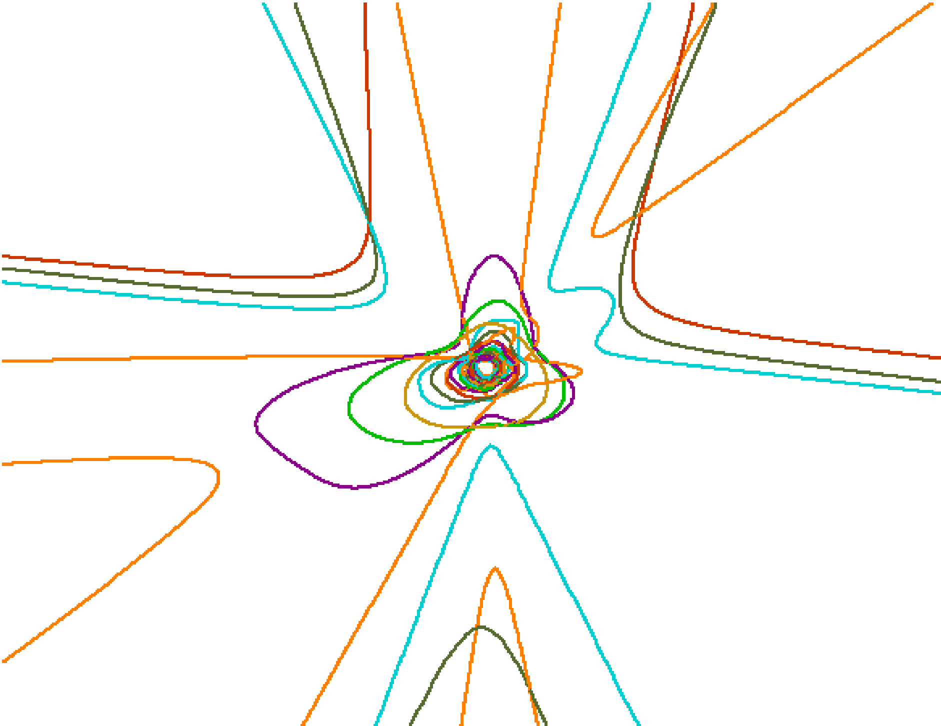


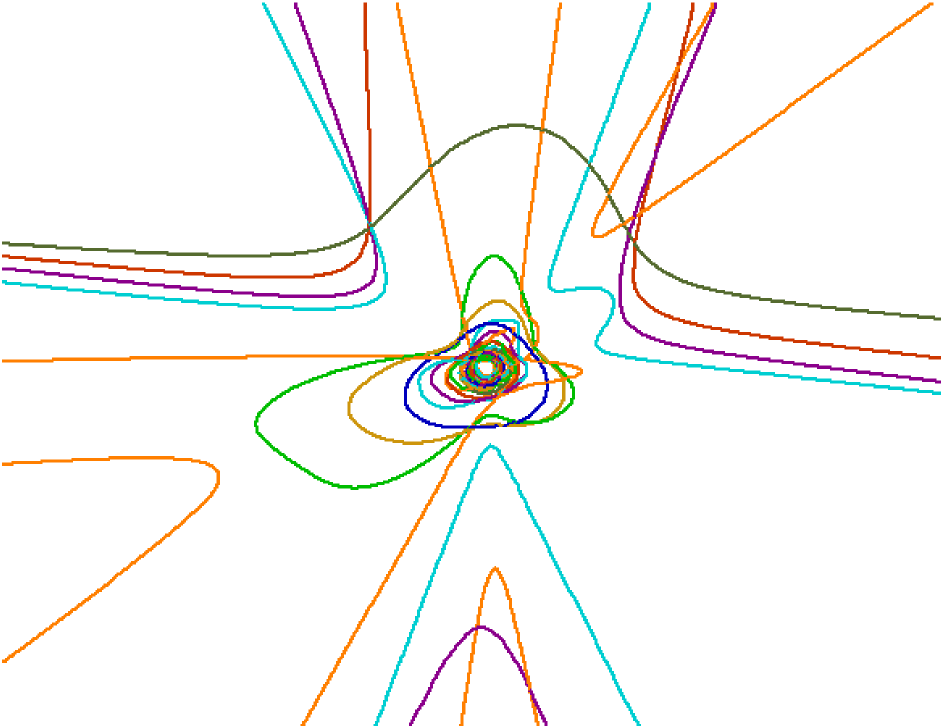


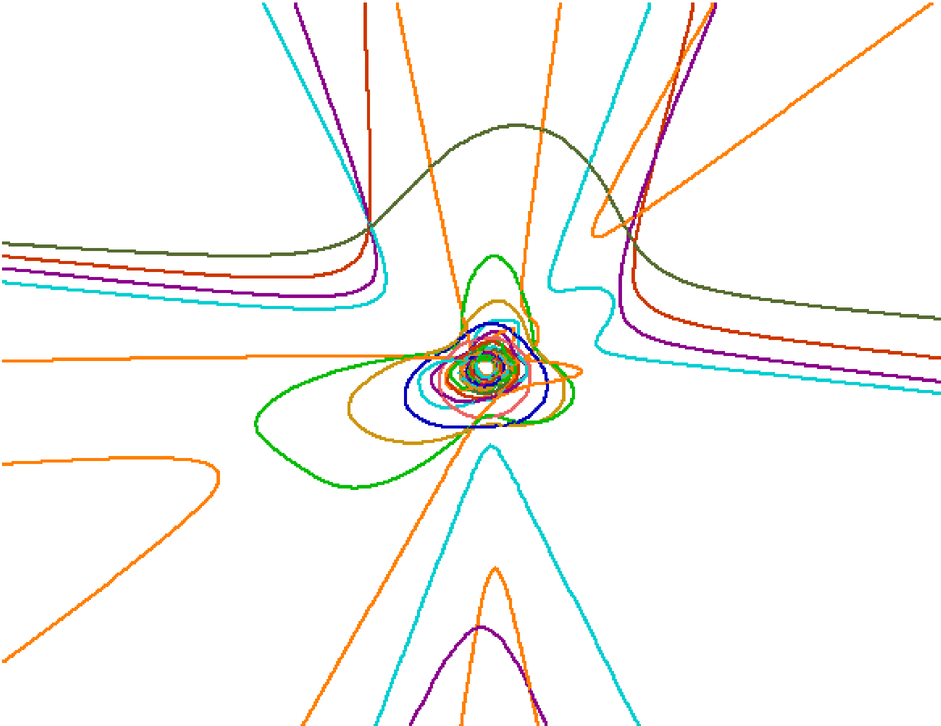


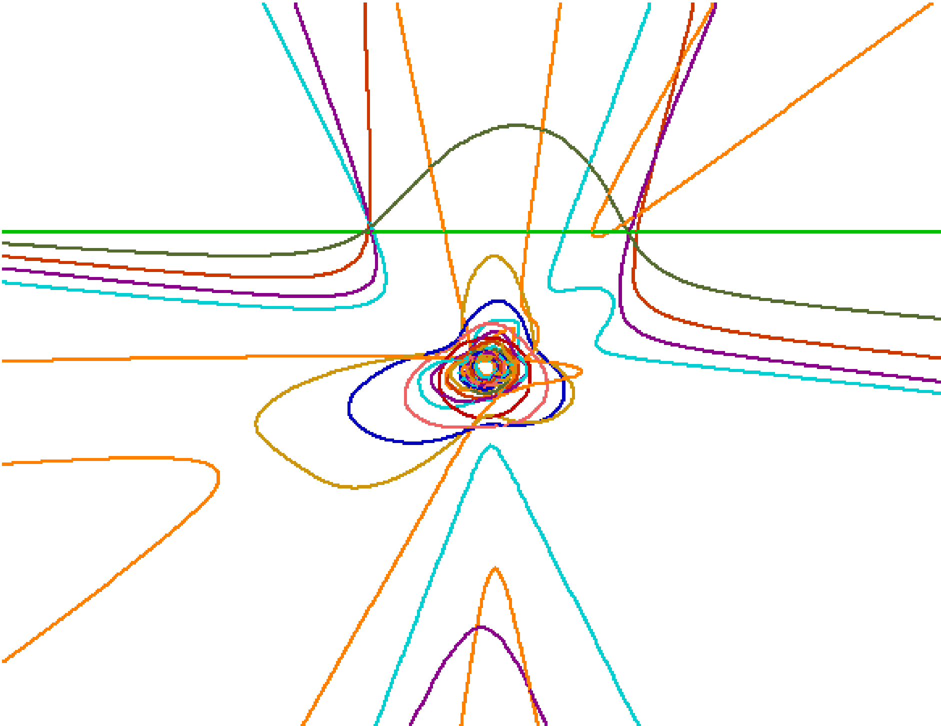












Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$,

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$

Soit S le projeté d'un spectraèdre. Alors

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$

Soit S le projeté d'un spectraèdre. Alors

- S est convexe,

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$

Soit S le projeté d'un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un ensemble semi-algébrique, c.-à-d. une combinaison booléenne de fermés semi-algébriques de base.

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$

Soit S le projeté d'un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un ensemble semi-algébrique, c.-à-d. une combinaison booléenne de fermés semi-algébriques de base.

En effet, le théorème de Tarski dit que tout projeté d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique.

Projetés de spectraèdres

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k \colon A(x,y) \succeq 0\}$ pour une IML $A(x,y) \succeq 0$, on appelle cette IML une représentation IML de S avec variables additionnelles y et on dit que S est le projeté d'un spectraèdre.

Exemple $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0\}$

Soit S le projeté d'un spectraèdre. Alors

- S est convexe,
- S est un ensemble semi-algébrique, c.-à-d. une combinaison booléenne de fermés semi-algébriques de base.

En effet, le théorème de Tarski dit que tout projeté d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique.

Deuxième grande question de l'exposé:

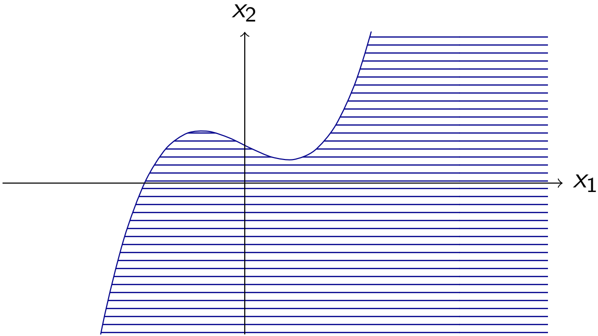
Question (Nemirovskii, Congrès International de Mathématiques, Madrid 2006) Est-ce que tout convexe semi-algébrique est un projeté d'un spectraèdre?

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
 & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
- & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

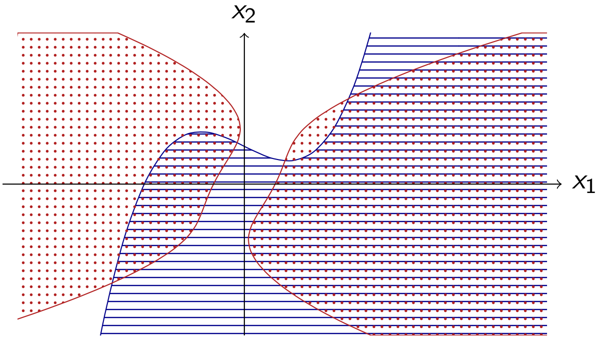
Système d'inégalités polynomiales

$$A \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrrr} & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\ - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \end{array}$$



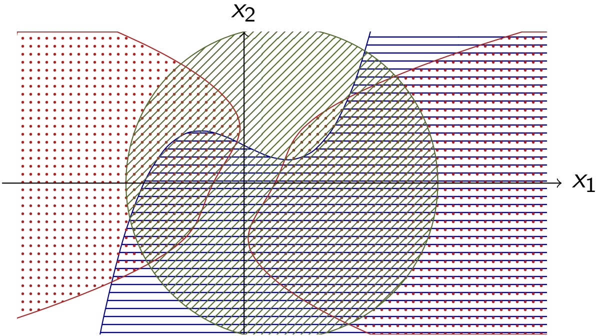
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



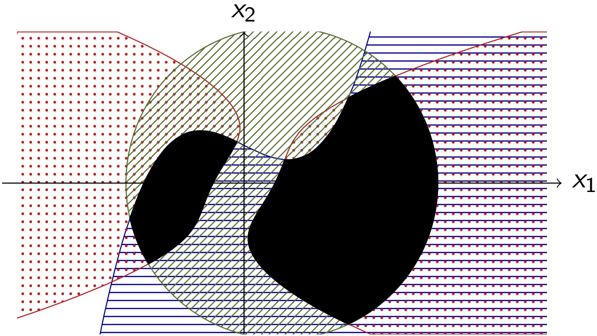
Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



Système d'inégalités polynomiales

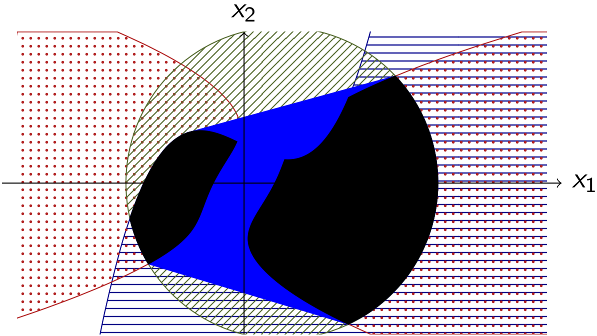
$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
\color{blue}{A} & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
\color{brown}{B} & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
\color{olive}{C} & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

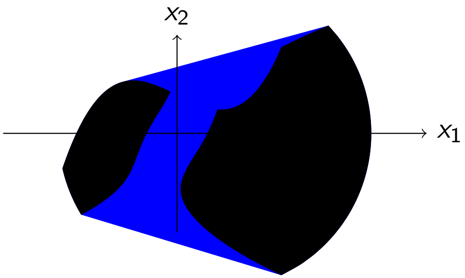


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}$$

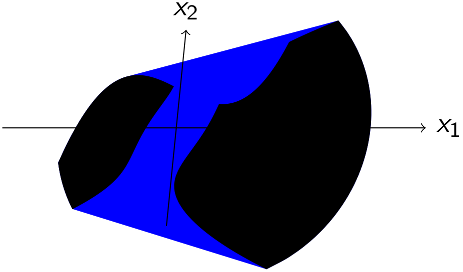


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & - x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

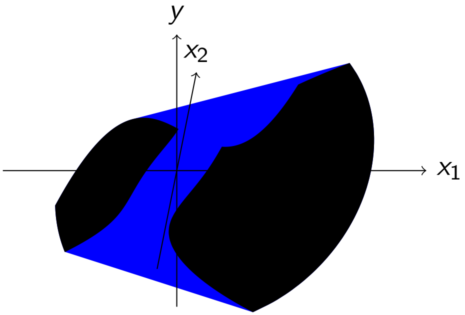


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

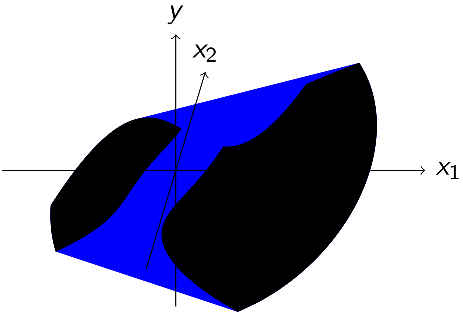


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\color{blue}{A} & & - x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
\color{red}{B} & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
\color{green}{C} & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$

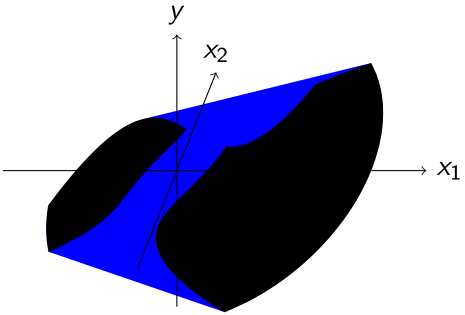


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}$$

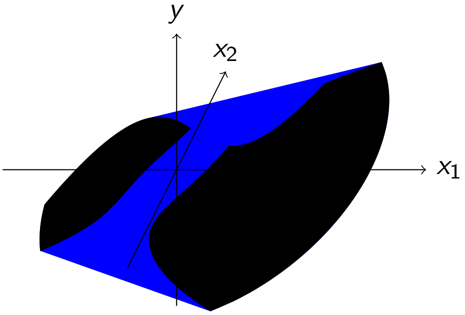


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr}
{\color{blue}A} & & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
{\color{green}C} & & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$

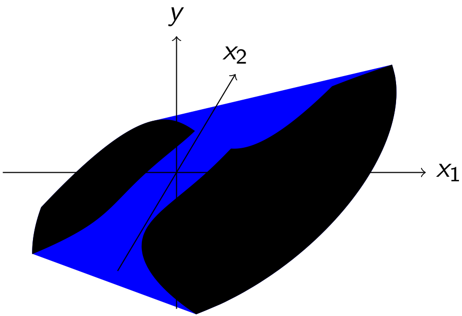


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

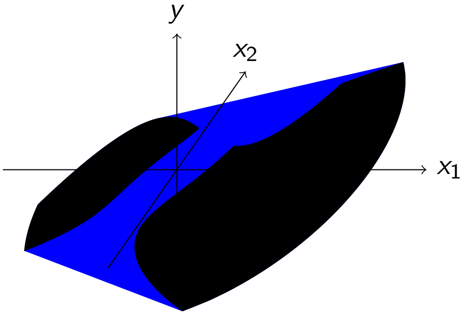


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

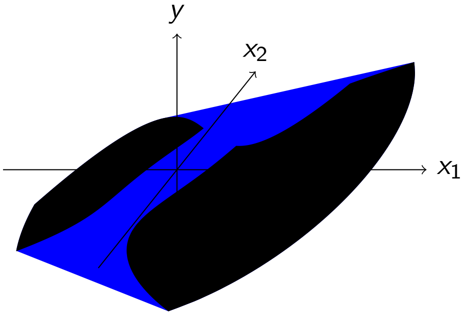


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
{\color{blue}A} & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
{\color{green}C} & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

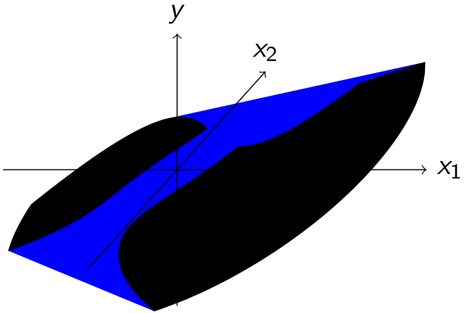


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

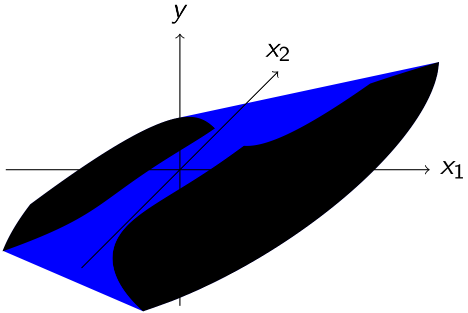
$$
\begin{array}{lrl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

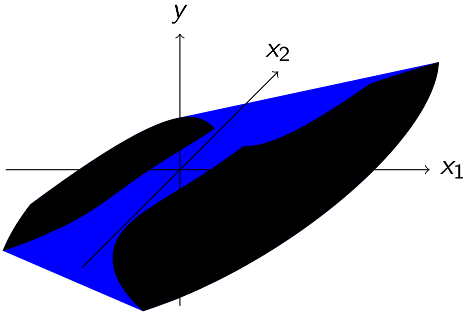
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

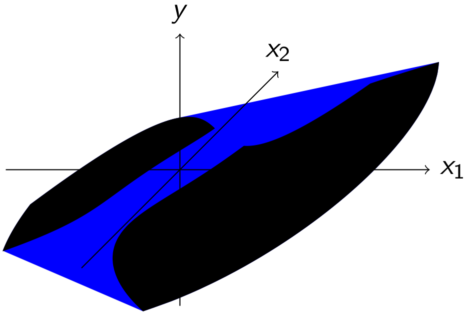
$$
\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

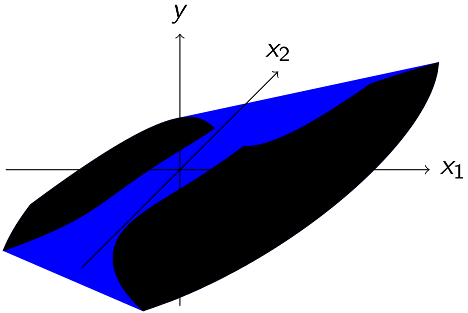
$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -\ y_1 & +\ x_1 & +\ 2x_2 & -\ 1 & \geq & 0 \\
B & -\ x_2^4 & +\ 2x_1^2 & -\ 2x_1x_2 & +\ x_2^2 & -\ \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\ x_1^2 & -\ x_2^2 & +\ x_1 & +\ 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

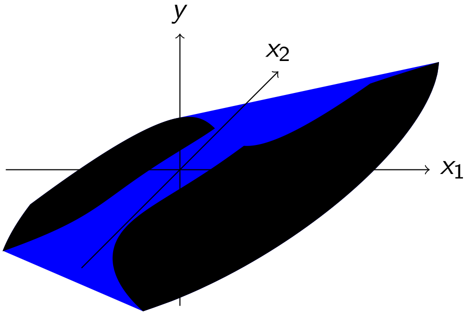
$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

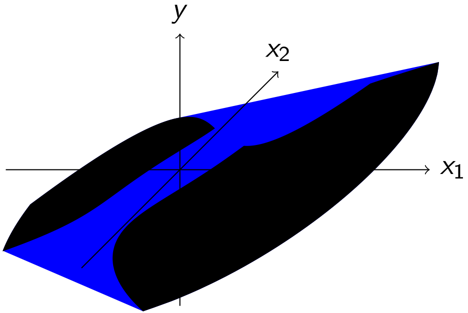
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

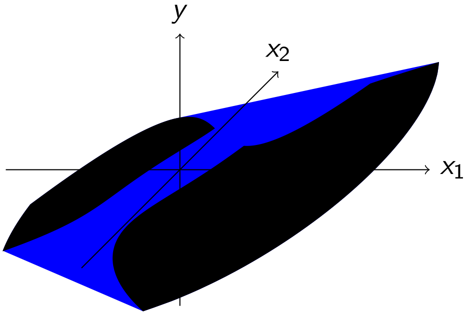
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

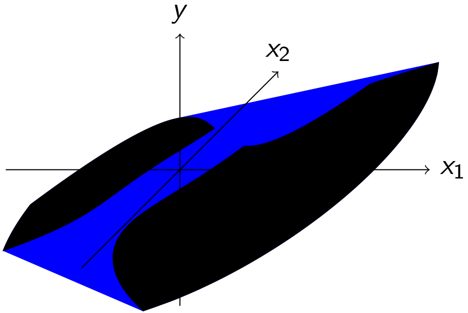
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

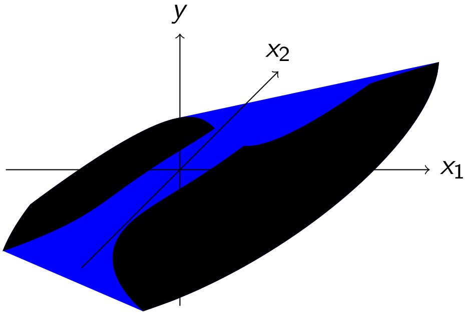
$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & - y_1 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - y_2 & + 2y_3 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - y_3 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

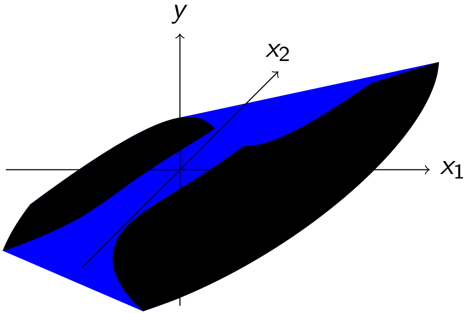
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

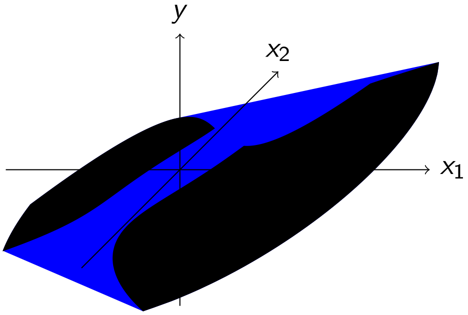
$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -\,y_1 & +\,x_1 & +\,2x_2 & -\,1 & \geq & 0 \\
B & -\,y_2 & +\,2y_3 & -\,2y_4 & +\,x_2^2 & -\,\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\,y_3 & -\,x_2^2 & +\,x_1 & +\,4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités linéaires

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

redondant:

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcl}
A & & & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcl}
AB & & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrcr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrcr}
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrrr}
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredondant:}} \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

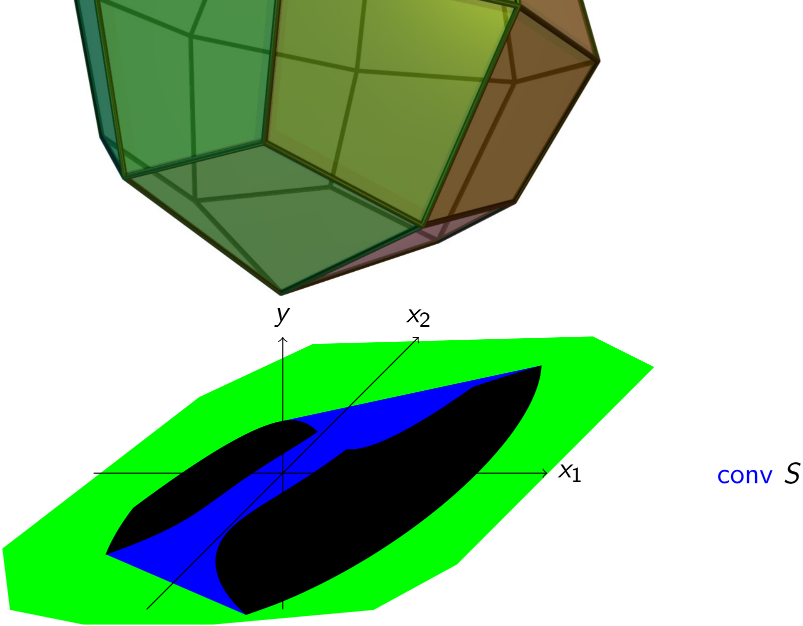
Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & y_{18} & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$



y
x2
x1
conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(a+bx_1+cx_2+dx_1^2+ex_1x_2+fx_2^2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + f x_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrcl}
A & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 \geq 0 \\
B & - x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 \geq 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c, ...):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\dots$):

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix} \succeq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4)\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

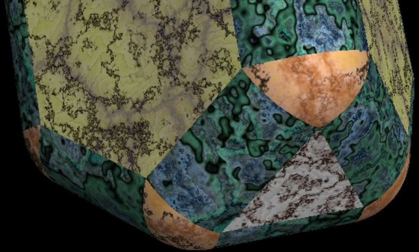
Système d'inégalités polynomiales

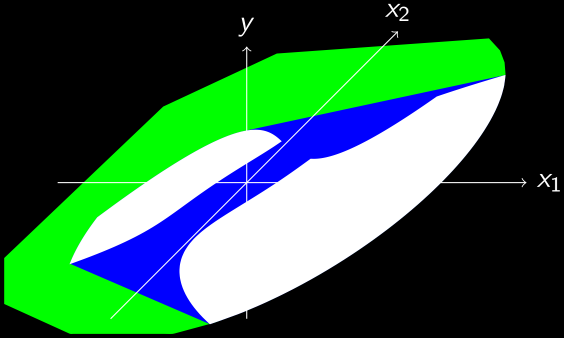
Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \succeq 0$$





conv S

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent…

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent…
- …l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent…
- …l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \quad s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \quad \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent…
- …l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent...
- ...l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (spectraèdre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$)

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent...
- ...l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (spectraèdre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$)
- $S_k := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent...
- ...l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (spectraèdre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$)
- $S_k := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq \ldots \subseteq S_4 \subseteq S_3 \subseteq S_2 \subseteq S_1$.

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes qui définissent…
- …l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (spectraèdre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$)
- $S_k := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq \dots \subseteq S_4 \subseteq S_3 \subseteq S_2 \subseteq S_1$.
La question est si $\operatorname{conv} S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

La question est si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

La question est si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Proposition (Netzer & Plaumann & S. 2008)

$S = S_k \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ sur S} \implies f \in T_k)$

$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

La question est si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Proposition (Netzer & Plaumann & S. 2008)
$S = S_k \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ sur S} \implies f \in T_k)$

Le théorème suivant est basé sur des constructions des certificats de positivité impliquant des sommes de carrés (S. 2002, S. 2004, S. 2005, Hol & Scherer 2006).

$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

La question est si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Proposition (Netzer & Plaumann & S. 2008)
$S = S_k \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \colon (f \geq 0 \text{ sur S} \implies f \in T_k)$

Le théorème suivant est basé sur des constructions des certificats de positivité impliquant des sommes de carrés (S. 2002, S. 2004, S. 2005, Hol & Scherer 2006).

Théorème (Helton & Nie 2008) Soit S compact.
Si on a pour tout $x \in S$ et pour tout i tel que $g_i(x) = 0$:

- $x \in \partial S$,
- $Dg_i(x) \neq 0$,
- $D^2 g_i(x)|_{(\ker Dg_i(x)) \times (\ker Dg_i(x))} \prec 0$.

Alors $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

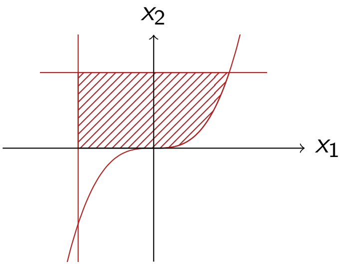
$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

Théorème (Netzer & Plaumann & S. 2008) Si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors toutes les faces de S sont exposées.

$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

Théorème (Netzer & Plaumann & S. 2008) Si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors toutes les faces de S sont exposées.

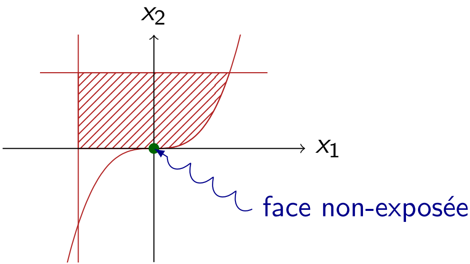
Exemple $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1,\, x_1^3 \leq x_2,\, 0 \leq x_2 \leq 1\}$



$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

Théorème (Netzer & Plaumann & S. 2008) Si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors toutes les faces de S sont exposées.

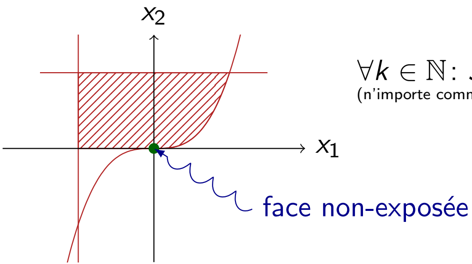
Exemple $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1,\, x_1^3 \leq x_2,\, 0 \leq x_2 \leq 1\}$



$\boxed{\text{Supposons } S \text{ convexe et } S^\circ \neq \emptyset.}$

Théorème (Netzer & Plaumann & S. 2008) Si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors toutes les faces de S sont exposées.

Exemple $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1,\ x_1^3 \leq x_2,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$



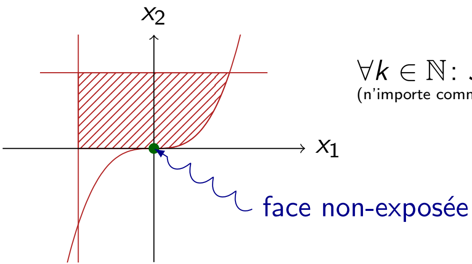
$\forall k \in \mathbb{N}$: $S \neq S_k$

(n'importe comment on choisit $g_1, \ldots, g_m$)

Supposons S convexe et $S^\circ \neq \emptyset$.

Théorème (Netzer & Plaumann & S. 2008) Si $S = S_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors toutes les faces de S sont exposées.

Exemple $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1,\ x_1^3 \leq x_2,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$



$\forall k \in \mathbb{N}$: $S \neq S_k$
(n'importe comment on choisit $g_1, \ldots, g_m$)

Proposition (Helton & Nie 2008) Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés de spectraèdres bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ l'est aussi.

Literature

Gårding: An inequality for hyperbolic polynomials
J. Math. Mech. 8 (1959) 957–965

Helton & Nie: Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets

http://arxiv.org/abs/0709.4017

Helton & Nie: Semidefinite representation of convex sets

http://arxiv.org/abs/0705.4068

Helton & Vinnikov: Linear matrix inequality representation of sets
Comm. Pure Appl. Math. 60, no. 5 (2007) 654–674

http://dx.doi.org/10.1002/cpa.20155

Hol & Scherer: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs
Math. Prog. 107, no. 1-2 (2006) 189–211

http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0684-2

Literature

Lasserre: Convex sets with semidefinite representation
à paraître dans Math. Prog.
http://dx.doi.org/10.1007/s10107-008-0222-0

Lewis & Parrilo & Ramana: The Lax conjecture is true
Proc. Amer. Math. Soc. 133, no. 9 (2005) 2495–2499
http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07752-X

Nemirovskii: Advances in convex optimization: conic programming
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006
http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_I/21.pdf

avec Netzer & Plaumann:
Exposed faces of semidefinite representable sets
en préparation

avec Nie: On the complexity of Putinar's Positivstellensatz
J. Complexity 23, no. 1 (2007), 135—150
http://dx.doi.org/10.1007/10.1016/j.jco.2006.07.002

Literature

Quarez: Symmetric Determinantal Representation of Polynomials

http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00275615/fr/

Renegar: Hyperbolic programs, and their derivative relaxations
Found. Comput. Math. 6, no. 1 (2006) 59–79

http://dx.doi.org/10.1007/s10208-004-0136-z

An algorithmic approach to Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Pure Appl. Algebra 166 (2002), 307—319

http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00041-X

On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Complexity 20, no. 4 (2004), 529–543

http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2004.01.005

Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets
SIAM J. Opt. 15, no. 3 (2005), 805–825

http://dx.doi.org/10.1137/s1052623403431779