Kann man ein polynomiales Ungleichungssystem linearisieren?

Markus Schweighofer

Université de Rennes 1

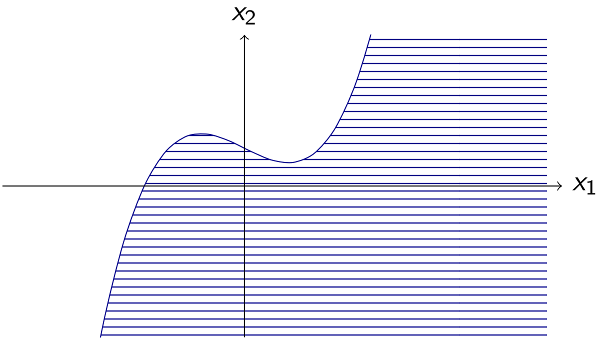
Universität Magdeburg
16. Juli 2008

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
 & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
- & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

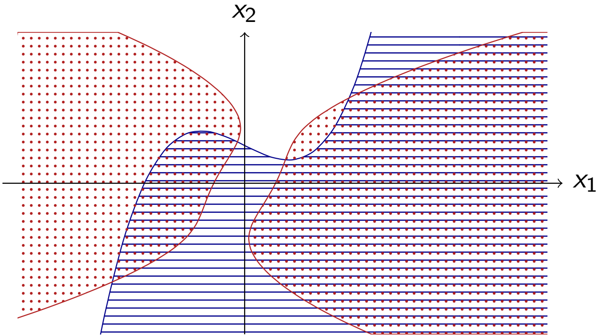
Polynomiales Ungleichungssystem

$$A \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrrr} & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\ - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \end{array}$$



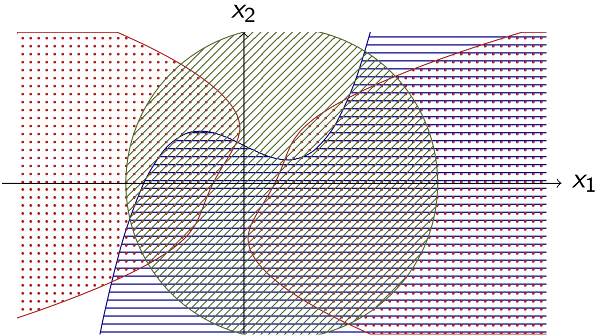
Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
{\color{blue}A} & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



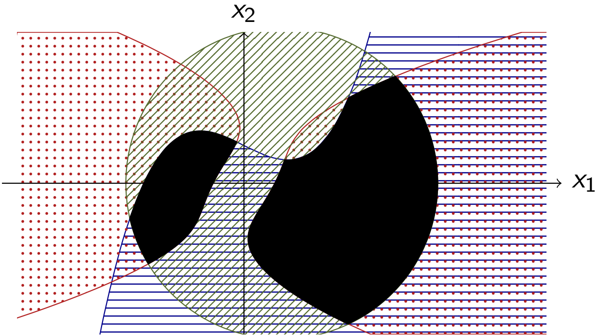
Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

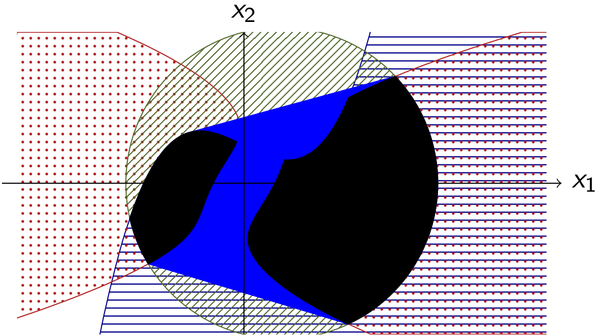
A			$-$	x_1^3	$+$	x_1	$+$	$2x_2$	$-$	1	$\geq$	0
B	$-$	x_2^4	$+$	$2x_1^2$	$-$	$2x_1x_2$	$+$	x_2^2	$-$	$\frac{1}{3}$	$\geq$	0
C			$-$	x_1^2	$-$	x_2^2	$+$	x_1	$+$	4	$\geq$	0



S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

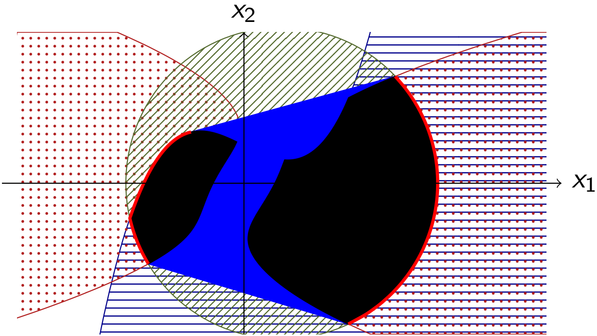


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



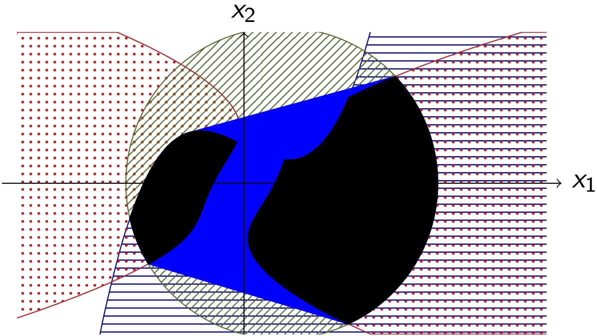
S

conv S

$S \cap \partial \operatorname{conv} S$

Polynomiales Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

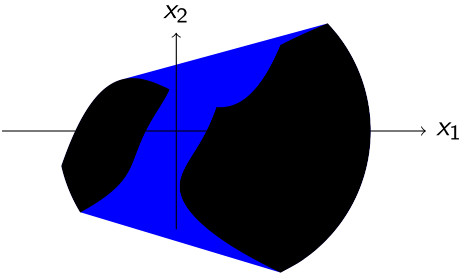


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

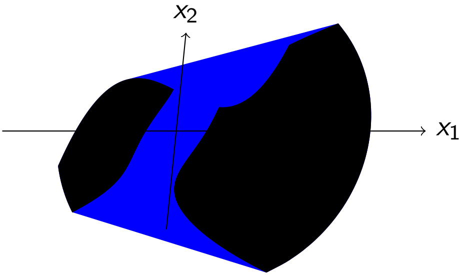


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

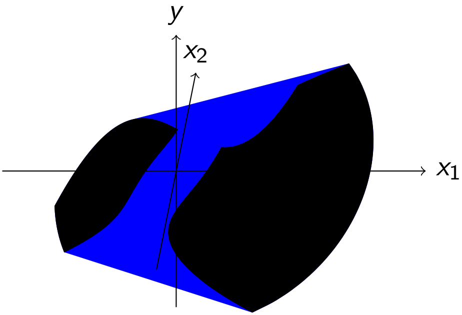


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

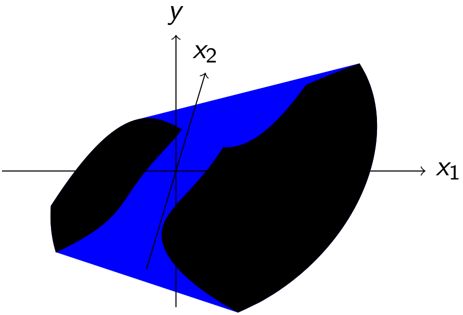


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$

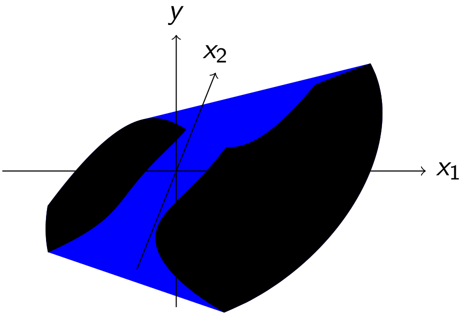


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

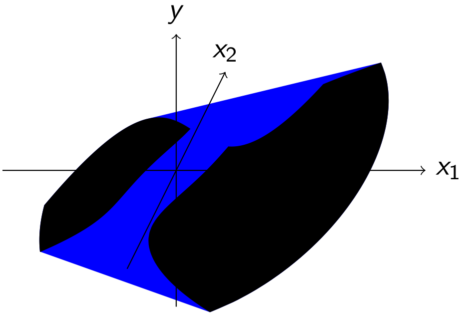


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

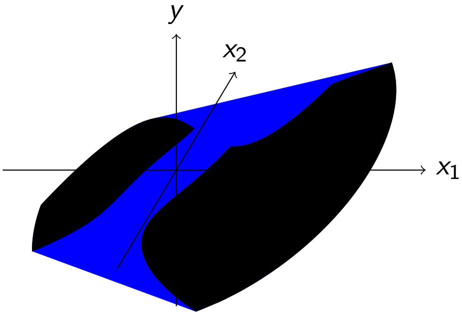


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$

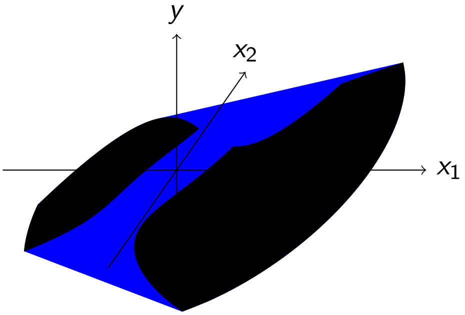


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

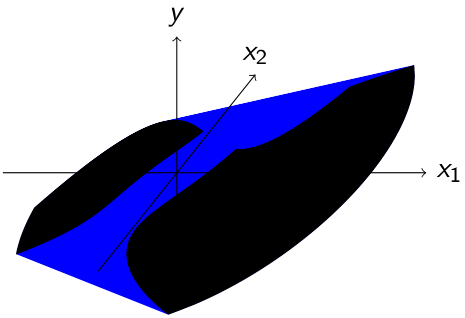


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{lrrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq 0
\end{array}
$$

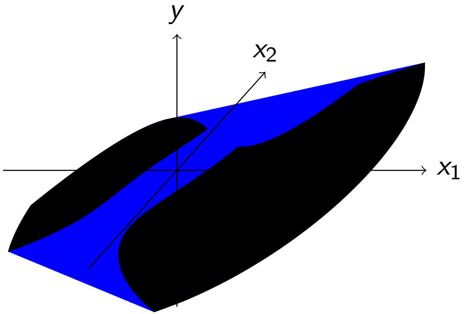


S

conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

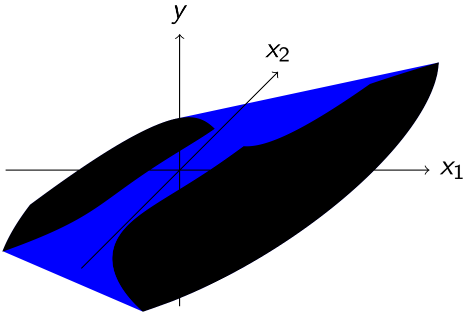
$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

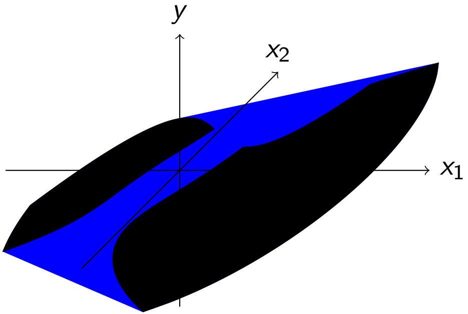
$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

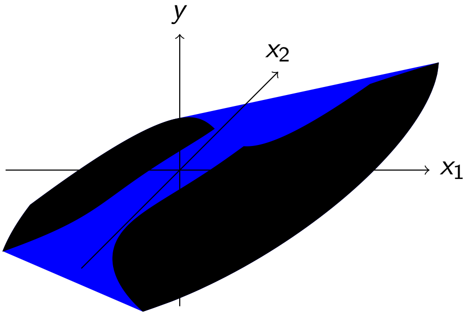
$$\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

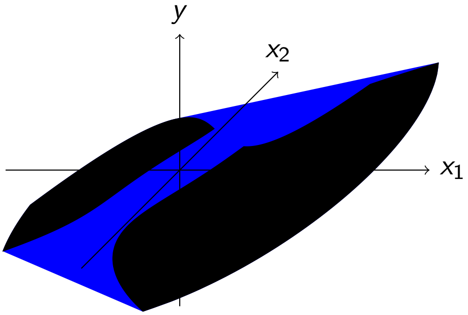
$$\begin{array}{lrcl}
A & -y_1 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

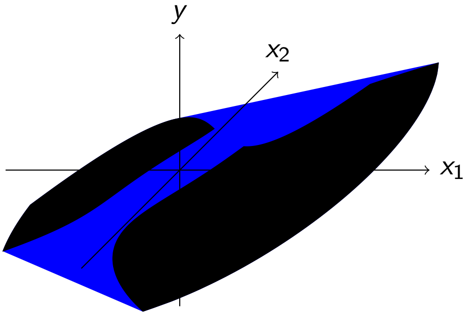
$$
\begin{array}{llrrrrrrl}
A & & & -\; y_1 & +\; x_1 & +\; 2x_2 & -\; 1 & \geq & 0 \\
B & -\; x_2^4 & +\; 2x_1^2 & -\; 2x_1x_2 & +\; x_2^2 & -\; \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & -\; x_1^2 & -\; x_2^2 & +\; x_1 & +\; 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

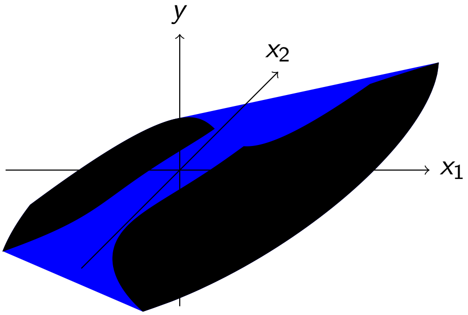
$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -\; y_1 & +\; x_1 & +\; 2x_2 & -\; 1 & \geq & 0 \\
B & -\; y_2 & +\; 2x_1^2 & -\; 2x_1x_2 & +\; x_2^2 & -\; \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\; x_1^2 & -\; x_2^2 & +\; x_1 & +\; 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

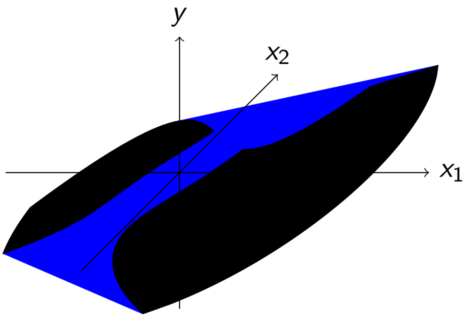
$$
\begin{array}{ll}
A & -y_1 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -y_2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

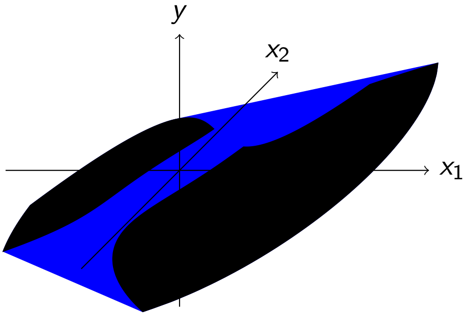
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

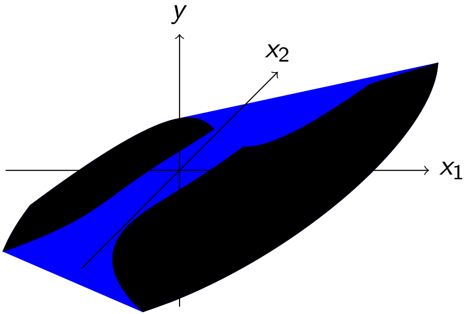
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

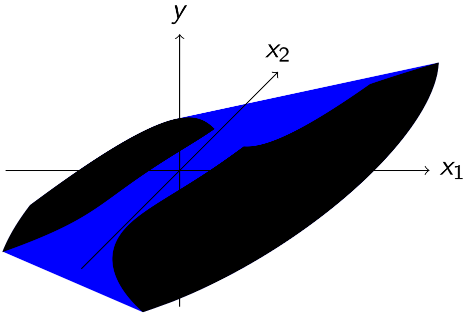
$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -\;y_1 & +\;x_1 & +\;2x_2 & -\;1 & \geq & 0 \\
B & -\;y_2 & +\;2y_3 & -\;2y_4 & +\;x_2^2 & -\;\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\;y_3 & -\;x_2^2 & +\;x_1 & +\;4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

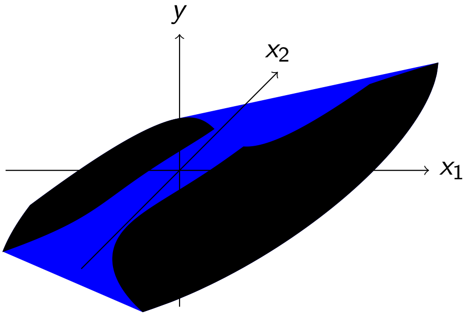
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Lineares Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
{\color{blue}A} & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
{\color{olive}C} & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundant:

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0
\end{array}$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{llrlrlrlrlrll}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{irredundant:}} \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

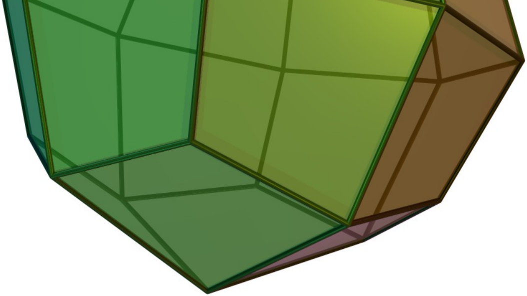
Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

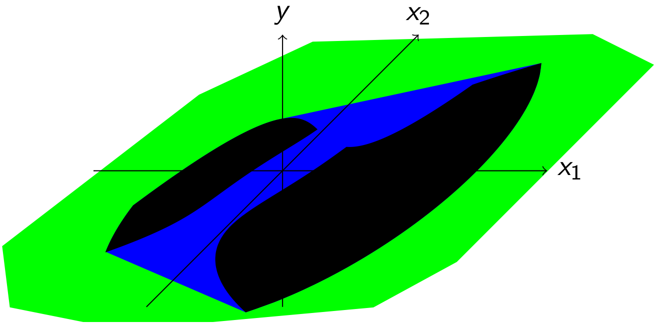
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredundant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & y_{18} & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$





conv S

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(a+bx_1+cx_2+dx_1^2+ex_1x_2+fx_2^2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \dots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \iff$$

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & - y_1 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - y_2 & + 2y_3 & - 2y_4 & + y_5 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - y_3 & - y_5 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -\ y_1 & +\ x_1 & +\ 2x_2 & -\ 1 & \geq & 0 \\
B & -\ y_2 & +\ 2y_3 & -\ 2y_4 & +\ y_5 & -\ \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\ y_3 & -\ y_5 & +\ x_1 & +\ 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix} \succeq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4)(a + bx_1 + cx_2) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcrcc}
A & & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

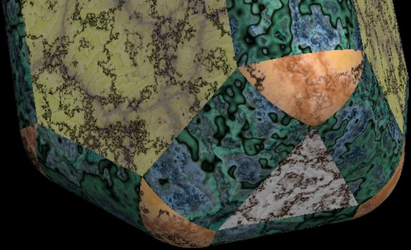
Polynomiales Ungleichungssystem

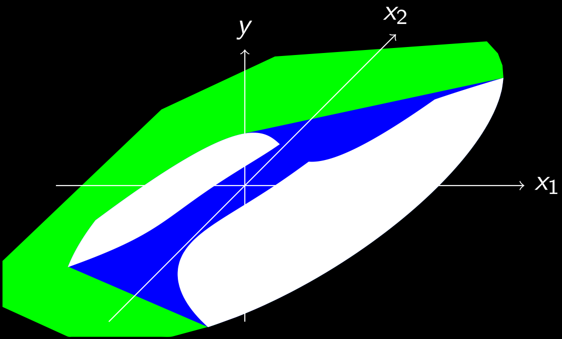
Linearisierungsversuch mittels Hinzufügen von Scharen redundanter Ungleichungen

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredundante Scharen (parametrisiert durch a, b, c):

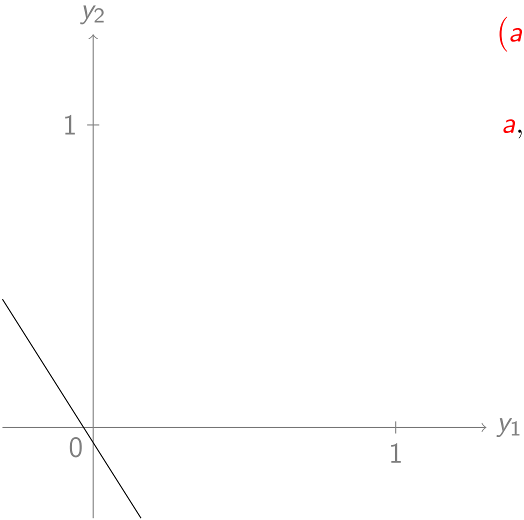
$$
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\qquad \succeq 0
$$





conv S

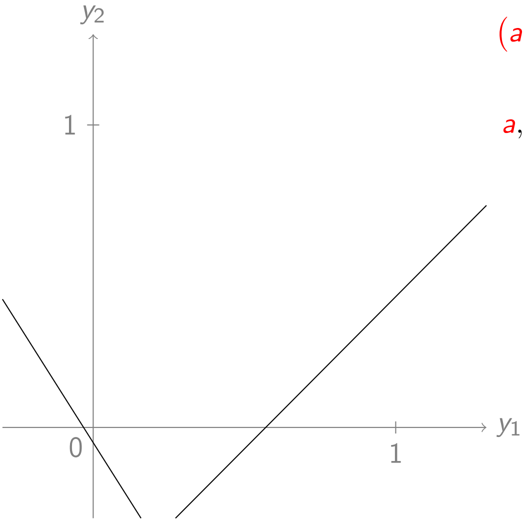
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

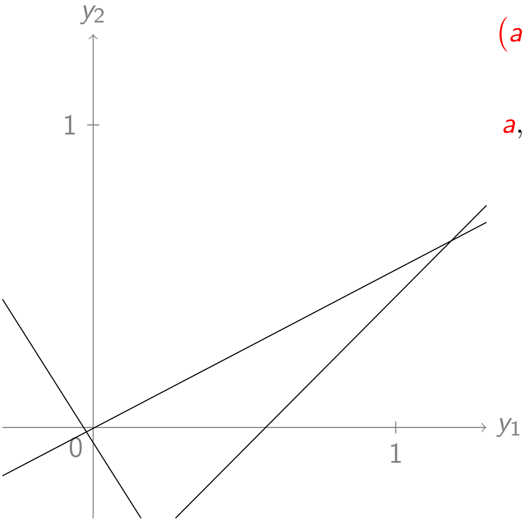
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

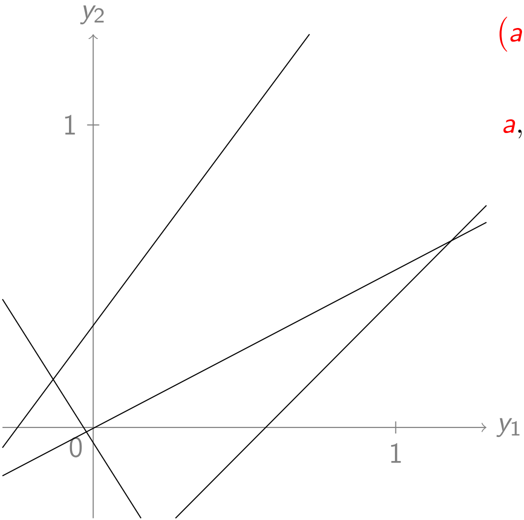
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

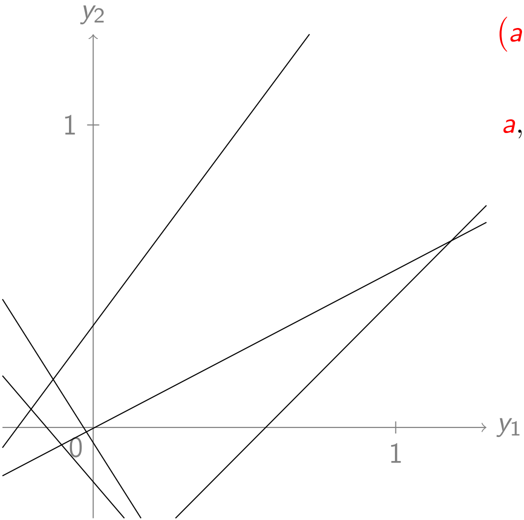
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

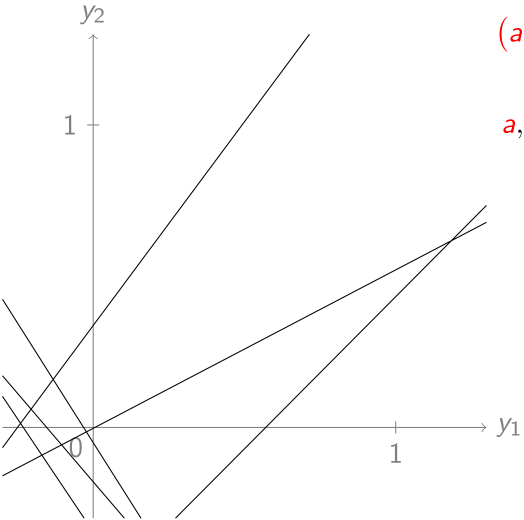
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

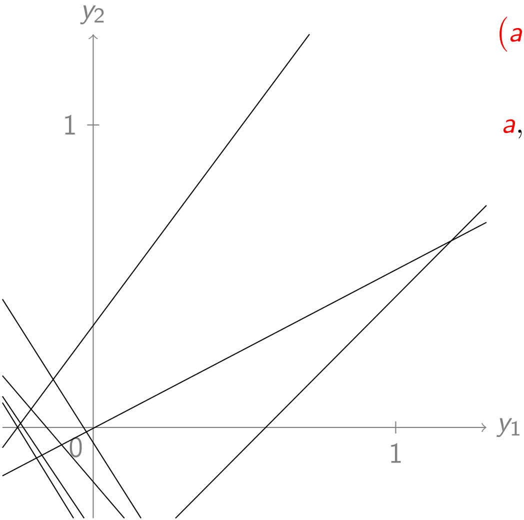
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

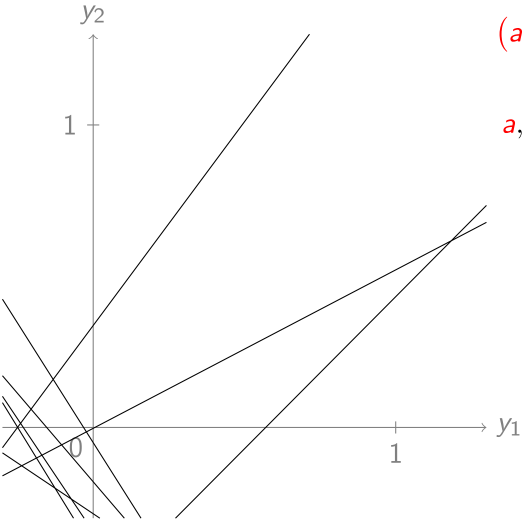
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

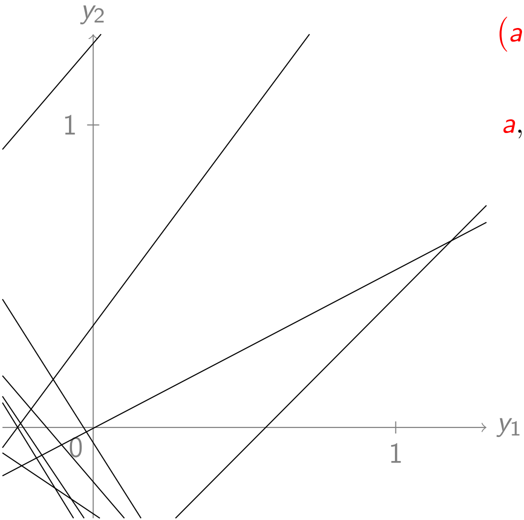
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

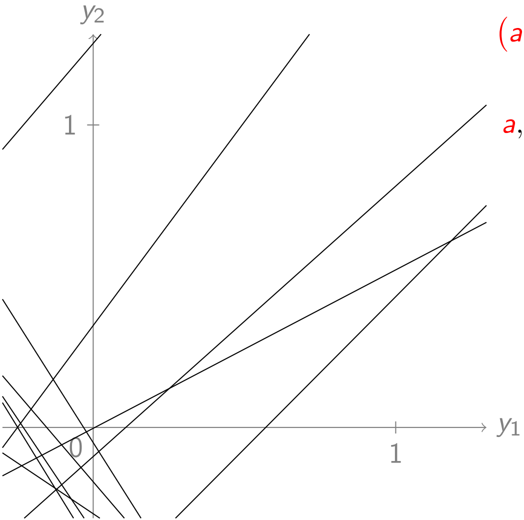
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

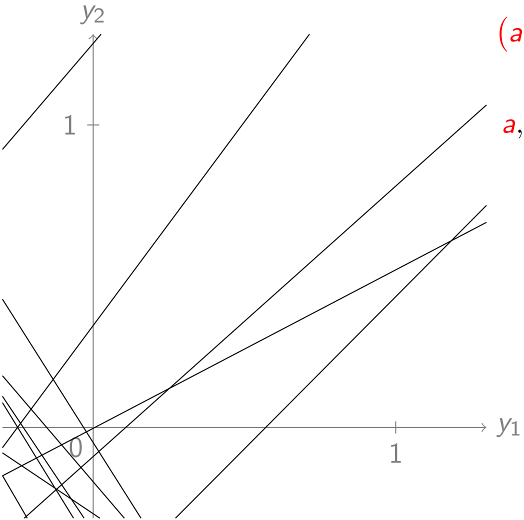
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

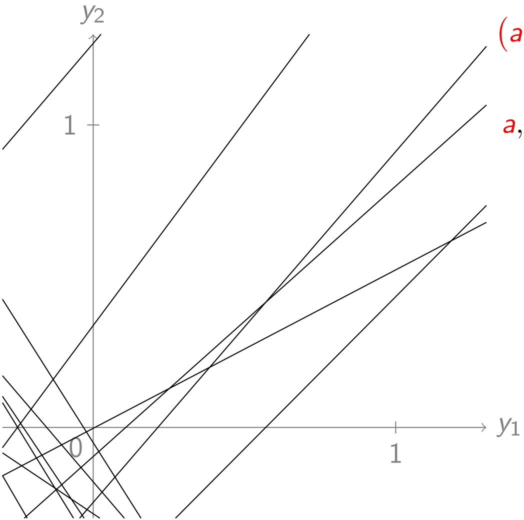
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

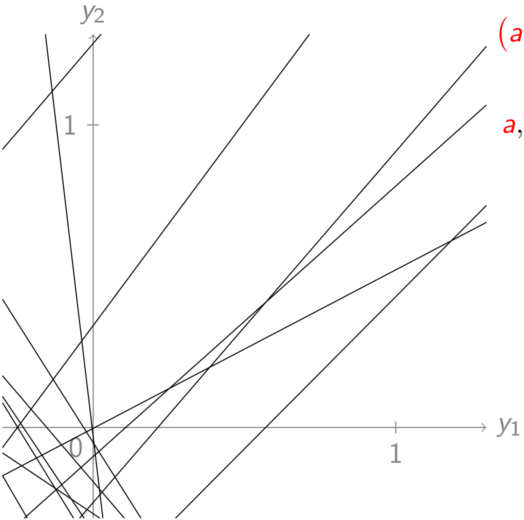
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

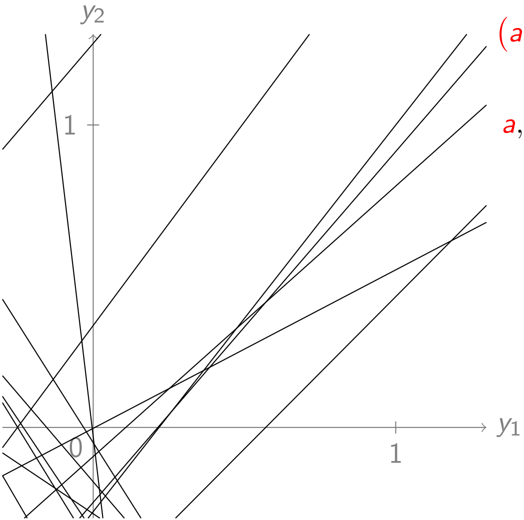
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

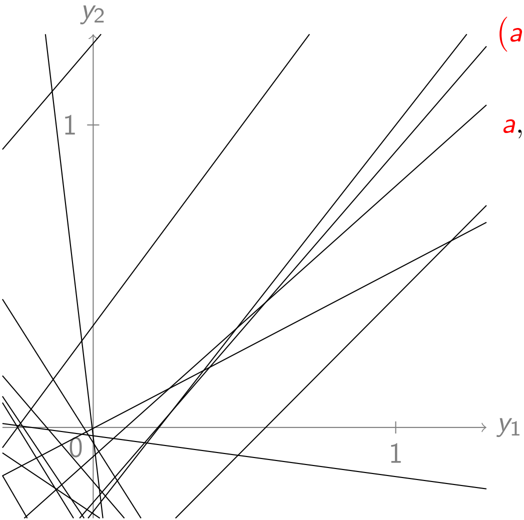
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

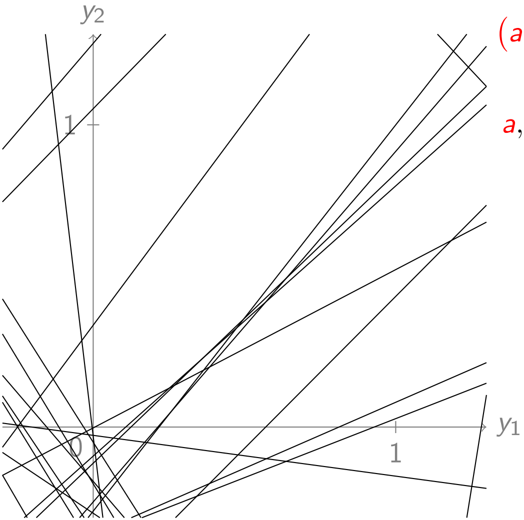
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

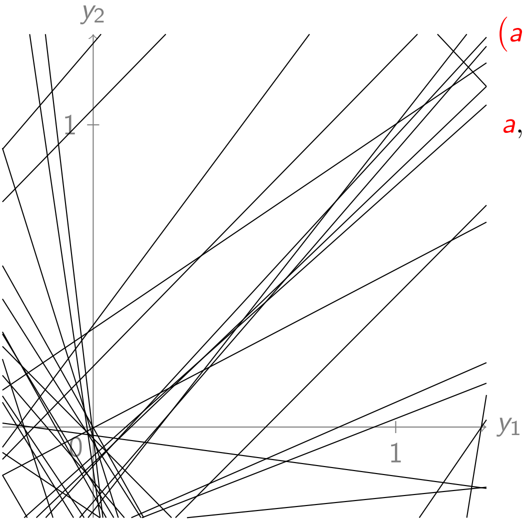
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

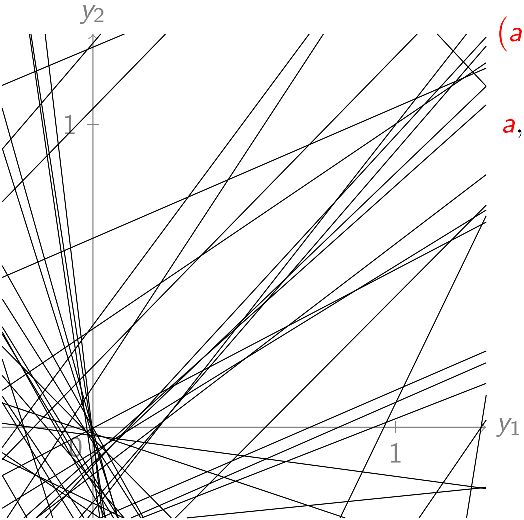
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

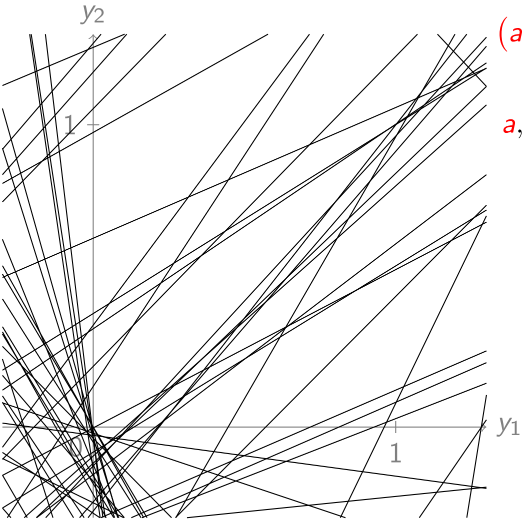
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

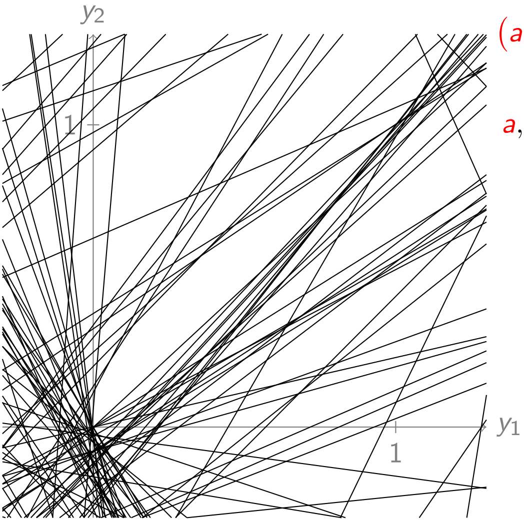
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

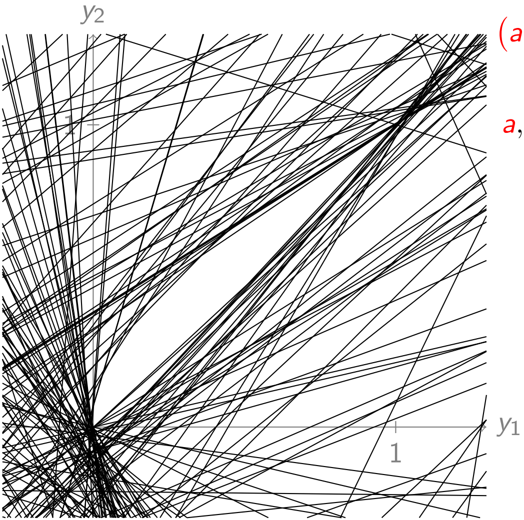
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

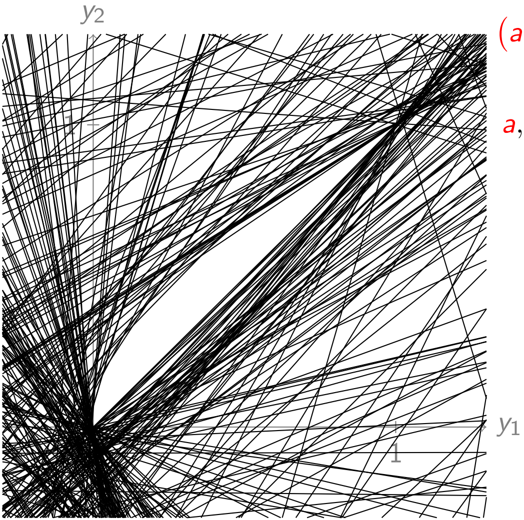
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

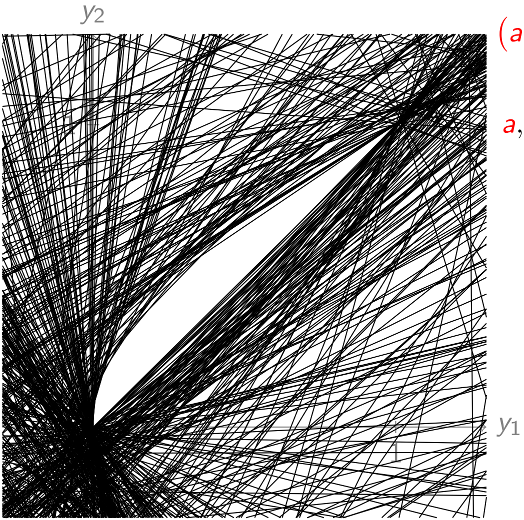
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

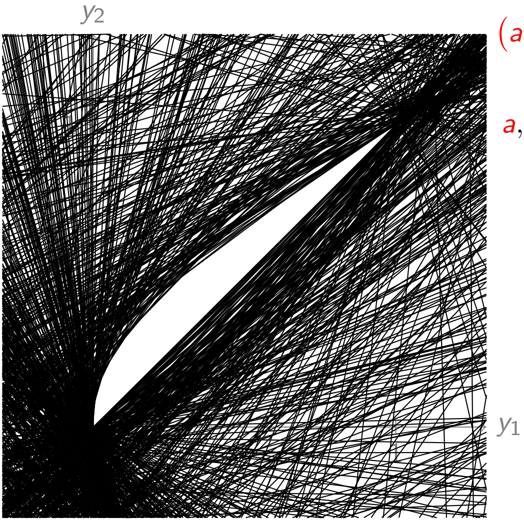
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

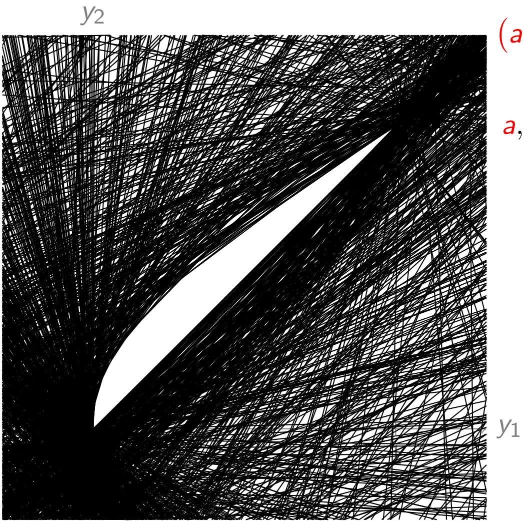
Lineare Matrixungleichung



$$\textcolor{red}{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \textcolor{red}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

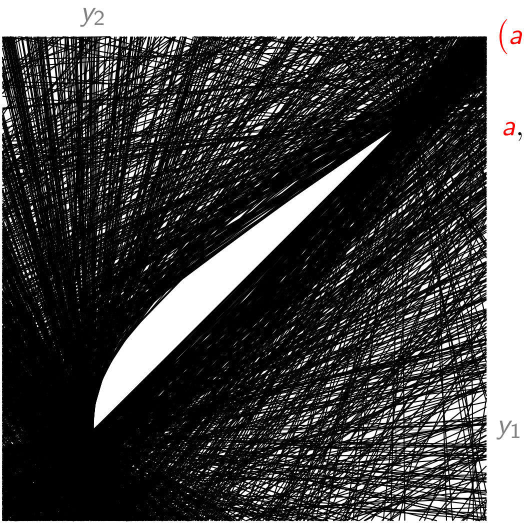
Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

Lineare Matrixungleichung



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben...

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben...
- ...die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben…
- …die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \quad s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \quad \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \quad \}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben...
- ... die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]$

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben...
- ... die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Polynome
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben…
- …die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems

- $S' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}\}$ Projektion
  Schmüdgen-Relaxierung

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ Polynome vom Grad höchstens k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben…
- …die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems
  (beschreibbar durch eine lineare Matrixungleichung)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ Projektion
  k-te Lasserre-Relaxierung

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ Polynome vom Grad höchstens k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben…
- …die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems
  (beschreibbar durch eine lineare Matrixungleichung)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ Projektion
  k-te Lasserre-Relaxierung

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ Polynome vom Grad höchstens k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben...
- ...die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems
  (beschreibbar durch eine lineare Matrixungleichung)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ Projektion
  k-te Lasserre-Relaxierung

Es gilt stets $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \ldots \subseteq S_4' \subseteq S_3' \subseteq S_2' \subseteq S_1'$.

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ Variablen
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ Polynome vom Grad höchstens k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ beschreiben…
- …die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  konvexer Kegel in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R} \text{ linear}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  Lösungsmenge des „linearisierten“ Systems
  (beschreibbar durch eine lineare Matrixungleichung)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ Projektion
  k-te Lasserre-Relaxierung

Es gilt stets $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \dots \subseteq S_4' \subseteq S_3' \subseteq S_2' \subseteq S_1'$.
Die Frage ist, ob $\operatorname{conv} S = S_k'$ für genügend großes $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Proposition. Wenn S kompakt ist, dann ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Proposition. Wenn S kompakt ist, dann ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Proposition. Wenn S kompakt ist, dann ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Bemerkung. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ on } S\}$

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Proposition. Wenn S kompakt ist, dann ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Bemerkung. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ on } S\}$

Proposition. $\overline{S'_k} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \cap \overline{T_k}\}$.

$\boxed{\text{Sei } S \neq \emptyset \text{ und } k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.}$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Hat S nichtleeres Inneres, so ist T_k abgeschlossen in $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Proposition. Wenn S kompakt ist, dann ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Bemerkung. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap\{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ on } S\}$

Proposition. $\overline{S'_k} = \bigcap\{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \cap \overline{T_k}\}$.

Proposition. Ist $\operatorname{conv} S$ abgeschlossen, so gilt
$\operatorname{conv} S = S'_k \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \; d\mu$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \; d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0$ on $S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt derart, daß für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ mit $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt derart, daß für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ mit $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$ gilt $f \in T_k$ für ein

$$k \leq cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt derart, daß für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ mit $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$ gilt $f \in T_k$ für ein

$$k \leq c\left(1 + \left(n\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt derart, daß für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ mit $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$ gilt $f \in T_k$ für ein

$$k \leq c \left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ W-Maß μ auf $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Folgerung. $\operatorname{conv} S = S'$

Satz (2004). Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, setze $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$) abhängt derart, daß für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ mit $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$ gilt $f \in T_k$ für ein

$$k \le c \left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

Folgerung. $\exists c \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}_{\ge c} : \forall x \in S'_k : \operatorname{dist}(x, \operatorname{conv} S) \le \frac{c}{\sqrt[c]{k}}$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Sei S kompakt.

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1 \times *}$: $f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

Sei S kompakt.

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}\colon f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}\colon F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist.

Sei S kompakt.

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist. Wende Schmüdgen an auf $f = Y$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$S_F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y Eigenwert von F(x)}\}$$
$$= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\},$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist. Wende Schmüdgen an auf $f = Y$. Benutze
$\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ ist kommutativ).

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt.}}$

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}: f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}: F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist. Wende Schmüdgen an auf $f = Y$. Benutze $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ ist kommutativ). Da $P_F(\bar{X}, F) = 0$ nach Cayley-Hamilton, verschwindet p_F in dieser Darstellung.

Sei S kompakt.

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist. Wende Schmüdgen an auf $f = Y$. Benutze $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ ist kommutativ). Da $P_F(\bar{X}, F) = 0$ nach Cayley-Hamilton, verschwindet p_F in dieser Darstellung. Matrizenrechnungen kann man blockweise ausführen!

Sei S kompakt.

Satz (Schmüdgen 1991). Für alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Folgerung (Hol & Scherer 2008). Für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Beweis (M.S.). Gegeben $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ mit $F \succ 0$ auf S, betrachte $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ und beachte, daß $f > 0$ auf

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \text{y Eigenwert von F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ das charakteristische Polynom von F ist. Wende Schmüdgen an auf $f = Y$. Benutze $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ ist kommutativ). Da $P_F(\bar{X}, F) = 0$ nach Cayley-Hamilton, verschwindet p_F in dieser Darstellung. Matrizenrechnungen kann man blockweise ausführen!
Problem: So bekommen wir keine Gradschranken wie in Schmüdgen.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Satz (Helton & Nie). Für $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t \times t}$, setze $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Satz (Helton & Nie). Für $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t \times t}$, setze $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.

Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Satz (Helton & Nie). Für $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t \times t}$, setze $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1, \dots, g_m$ abhängt) so, Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Satz (Helton & Nie). Für $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, setze $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1,\dots,g_m$ abhängt) so, daß für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_d^{t\times t}$ mit $F^* := \min\{\lambda_{\min}(F(x)) \mid x \in S\} > 0$, Der Originalbeweis von Hol & Scherer ahmt meine algebraischen Konstruktionen für Polynome mit Matrixkoeffizienten nach. Das ist auch der Weg, den Helton and Nie gehen, um Gradschranken für den Satz von Hol & Scherer zu erhalten. Jedoch kann man sogar die Betrachtung von Matrixkoeffizienten gänzlich vermeiden, indem man $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ identifiziert mit der Schar $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ der Polynome $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und meine algebraischen Konstruktionen uniform und gleichzeitig für alle $a \in S^{t-1}$ durchführt.

Satz (Helton & Nie). Für $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, setze $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Gelte $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ (die nur von n, m und $g_1,\dots,g_m$ abhängt) so, daß für alle $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_d^{t\times t}$ mit $F^* := \min\{\lambda_{\min}(F(x)) \mid x \in S\} > 0$, man $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$ schreiben kann für gewisse $P_\delta \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_k^{t\times *}$ mit

$$k \leq cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|F\|}{F^*}\right)^c\right).$$

Konkavität

Die folgende Terminologie weicht vom gewöhnlichen Gebrauch ab. Es handelt sich um eine Art lokaler Konkavität, die man die man bereits an der zweiten Ableitung erkennen kann.

Konkavität

Die folgende Terminologie weicht vom gewöhnlichen Gebrauch ab. Es handelt sich um eine Art lokaler Konkavität, die man die man bereits an der zweiten Ableitung erkennen kann.

Definition. Sei $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strikt konkav auf } U \;:\iff\; D^2p \prec 0 \text{ auf } U \iff \forall x \in U\colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon D^2p(x)[v,v] < 0$$

Konkavität

Die folgende Terminologie weicht vom gewöhnlichen Gebrauch ab. Es handelt sich um eine Art lokaler Konkavität, die man die man bereits an der zweiten Ableitung erkennen kann.

Definition. Sei $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strikt konkav auf } U \;:\iff\; D^2 p \prec 0 \text{ auf } U \iff \forall x \in U \colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon D^2 p(x)[v,v] < 0$$

$$p \text{ strikt quasikonkav auf } U \;:\iff\; \forall x \in U \colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon (Dp(x)[v] = 0 \implies D^2 p(x)[v,v] < 0)$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u] ds\, dt$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(-\sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u]\, ds\, dt$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u))[x-u, x-u]\, ds\, dt$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \left(\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u)) ds\, dt \right) [x-u, x-u]$$

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\left(\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u)) ds \, dt \right)}_{=: F_{i,u}(x)} [x-u, x-u]$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ auf S,
benutze Hol & Scherer mit Schranken!

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S_k'$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = -\sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T F_{i,u} \, (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ auf S,
benutze Hol & Scherer mit Schranken!

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T \Big(\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} P_{i,u,\delta} P_{i,u,\delta}^T g^\delta \Big) (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ auf S,
benutze Hol & Scherer mit Schranken!

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Lemma (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt konkav auf S ist, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Sei $u \in \partial S$ und $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ mit $f \geq 0$ auf S und $f(u) = 0$. Zu zeigen: $f \in T_k$ für ein von f unabhängiges $k \in \mathbb{N}$. Da die Slaterbedingung erfüllt ist, gibt es Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, mit $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Nun hat man

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} (P^T_{i,u,\delta}(\bar{X} - u))^T (P^T_{i,u,\delta}(\bar{X} - u)) g^\delta$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ auf S,
benutze Hol & Scherer mit Schranken!

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Satz (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt quasikonkav auf S ist, dann gilt $S = S'_k$ for ein $k \in \mathbb{N}$.

Rückführung auf den Beweis des Lemmas mittels eines Tricks.

$\boxed{\text{Sei } S \text{ kompakt und konvex mit nichtleerem Inneren.}}$

Satz (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt quasikonkav auf S ist, dann gilt $S = S'_k$ for ein $k \in \mathbb{N}$.

Rückführung auf den Beweis des Lemmas mittels eines Tricks.

Satz (Helton & Nie 2008). Wenn jedes g_i strikt quasikonkav auf $\partial S \cap \{g_i = 0\}$ ist, g_i im Inneren von S nirgends verschwindet und Dg_i auf $\partial S \cap \{g_i = 0\}$ nirgends verschwindet, dann ist $S = S'_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Der Originalbeweis ist eine sehr schwierige Reduktion auf den letzten Satz. Sehr viel einfacherer Ansatz scheint möglich.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Reelle Quantorenelimination (Tarski 1951). In obiger Definition kann man äquivalenterweise sogar die Verwendung von „für alle reellen x“ und „für ein reelles x“ beim Aufbau der Formeln zulassen.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Reelle Quantorenelimination (Tarski 1951). In obiger Definition kann man äquivalenterweise sogar die Verwendung von „für alle reellen x“ und „für ein reelles x“ beim Aufbau der Formeln zulassen.

Definition. Wir nennen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine LMI-Projektion, wenn es $t \in \mathbb{N}$ und $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ gibt mit
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Reelle Quantorenelimination (Tarski 1951). In obiger Definition kann man äquivalenterweise sogar die Verwendung von „für alle reellen x“ und „für ein reelles x“ beim Aufbau der Formeln zulassen.

Definition. Wir nennen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine LMI-Projektion, wenn es $t \in \mathbb{N}$ und $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ gibt mit
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Beispiel. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ ist eine LMI-Projektion.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Reelle Quantorenelimination (Tarski 1951). In obiger Definition kann man äquivalenterweise sogar die Verwendung von „für alle reellen x“ und „für ein reelles x“ beim Aufbau der Formeln zulassen.

Definition. Wir nennen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine LMI-Projektion, wenn es $t \in \mathbb{N}$ und $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ gibt mit
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Beispiel. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ ist eine LMI-Projektion.

Bemerkung. Jedes S_k' ist eine LMI-Projektion.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Definition. Eine semialgebraische Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge, die durch eine Formel definiert werden kann, die mit „und“, „oder“ und „nicht“ aus polynomialen Ungleichungen aufgebaut ist.

Reelle Quantorenelimination (Tarski 1951). In obiger Definition kann man äquivalenterweise sogar die Verwendung von „für alle reellen x“ und „für ein reelles x“ beim Aufbau der Formeln zulassen.

Definition. Wir nennen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine LMI-Projektion, wenn es $t \in \mathbb{N}$ und $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ gibt mit
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Beispiel. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ ist eine LMI-Projektion.

Bemerkung. Jedes S'_k ist eine LMI-Projektion.

Bemerkung. Jede LMI-Projektion ist (selbstverständlich) konvex und (wegen der reellen Quantorenelimination) semialgebraisch.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Lemma (Helton & Nie). Sind $U_1, \dots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte nichtleere LMI-Projektionen, so ist auch $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ eine LMI-Projektion.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Lemma (Helton & Nie). Sind $U_1, \dots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte nichtleere LMI-Projektionen, so ist auch $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ eine LMI-Projektion.

Satz (Helton & Nie). Sei S kompakt, jedes g_i strikt quasikonkav auf $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ und ∂S enthalten im Abschluß des Inneren von S. Dann ist $\operatorname{conv} S$ eine LMI-Projektion.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Lemma (Helton & Nie). Sind $U_1, \dots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte nichtleere LMI-Projektionen, so ist auch $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ eine LMI-Projektion.

Satz (Helton & Nie). Sei S kompakt, jedes g_i strikt quasikonkav auf $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ und ∂S enthalten im Abschluß des Inneren von S. Dann ist $\operatorname{conv} S$ eine LMI-Projektion.

Beweis. Benutze das Lemma und den ersten Satz von Helton & Nie.

Ist jede konvexe semialgebraische Menge LMI-Projektion?

Lemma (Helton & Nie). Sind $U_1, \dots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte nichtleere LMI-Projektionen, so ist auch $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ eine LMI-Projektion.

Satz (Helton & Nie). Sei S kompakt, jedes g_i strikt quasikonkav auf $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ und ∂S enthalten im Abschluß des Inneren von S. Dann ist $\operatorname{conv} S$ eine LMI-Projektion.

Beweis. Benutze das Lemma und den ersten Satz von Helton & Nie.

Auf dem ICM in Madrid 2006 fragte Nemirovski, ob jede konvexe semialgebraische Menge eine LMI-Projektion ist:
„Diese Frage scheint völlig offen zu sein.“

Literatur

Helton & Nie: Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets

http://arxiv.org/abs/0709.4017

Helton & Nie: Semidefinite representation of convex sets

http://arxiv.org/abs/0705.4068

Lasserre: Convex sets with semidefinite representation
to appear in Math. Prog.

http://dx.doi.org/10.1007/s10107-008-0222-0

Literatur

mit Nie: On the complexity of Putinar's Positivstellensatz
J. Complexity 23, no. 1 (2007), 135—150
http://dx.doi.org/10.1007/10.1016/j.jco.2006.07.002

Hol & Scherer: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs,
Math. Prog. 107, no. 1-2 (2006), 189–211
http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0684-2

An algorithmic approach to Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Pure Appl. Algebra 166 (2002), 307—319
http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00041-X

On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Complexity 20, no. 4 (2004), 529–543
http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2004.01.005

Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets
SIAM J. Opt. 15, no. 3 (2005), 805–825
http://dx.doi.org/10.1137/s1052623403431779