Peut-on linéariser les systèmes d'inégalités polynomiales?

Markus Schweighofer

Université de Rennes 1

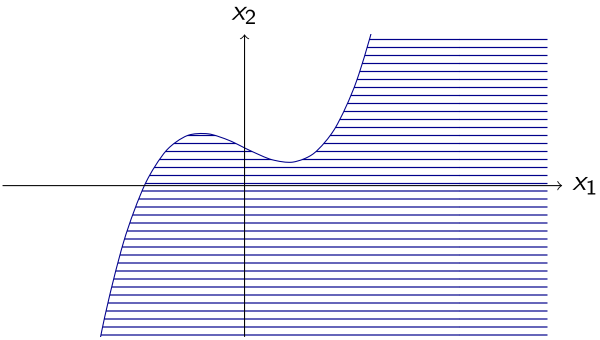
Séminaire d'Algèbre-Géométrie
Université de Brest
20 juin 2008

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
- & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

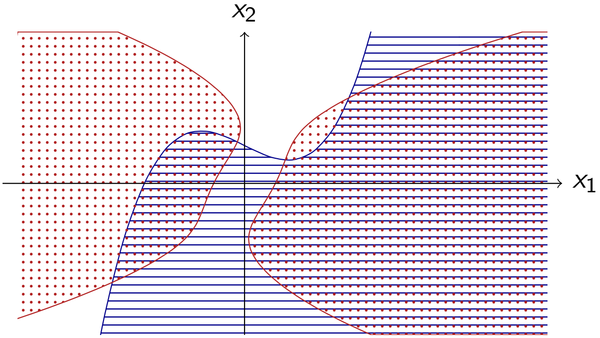
Système d'inégalités polynomiales

$$A \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\ - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \end{array}$$



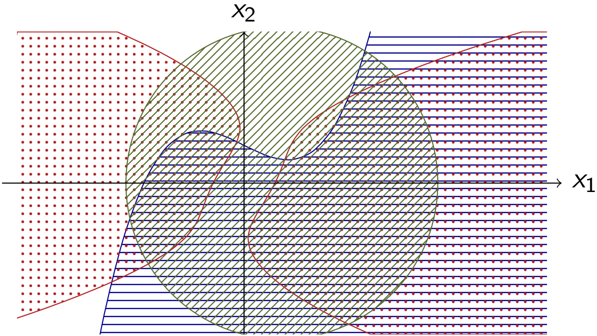
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
{\color{blue}A} & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
{\color{red}B} & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
 & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}
$$



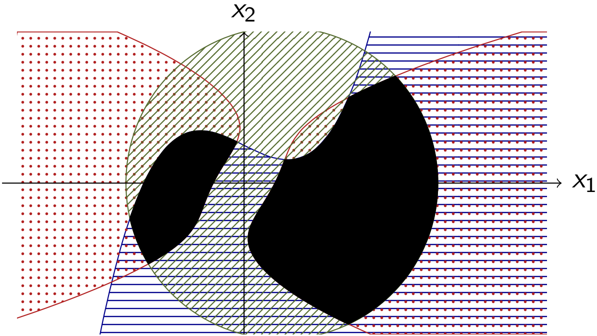
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



Système d'inégalités polynomiales

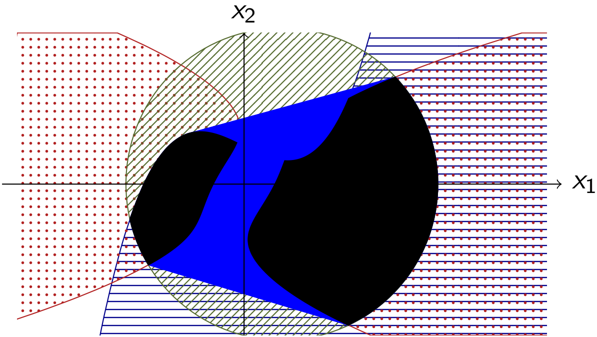
$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq 0
\end{array}
$$



S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

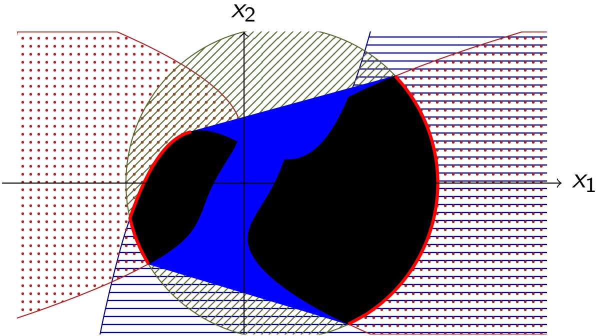


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



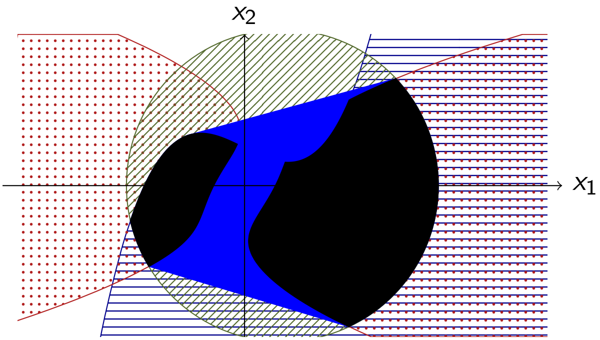
S

conv S

$S \cap \partial \operatorname{conv} S$

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

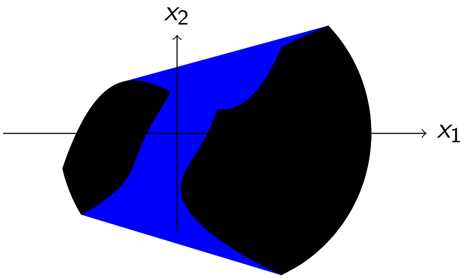


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq 0
\end{array}$$

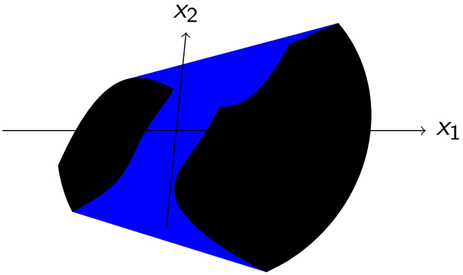


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{aligned}
A &\quad -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B &\quad -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \tfrac{1}{3} \geq 0 \\
C &\quad -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{aligned}
$$

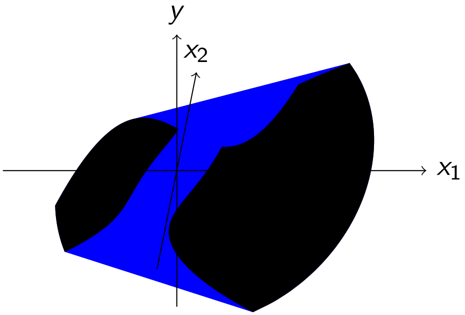


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

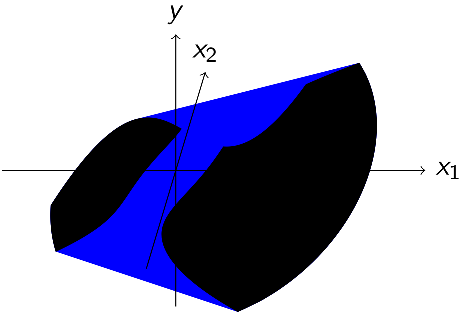


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{ll}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$

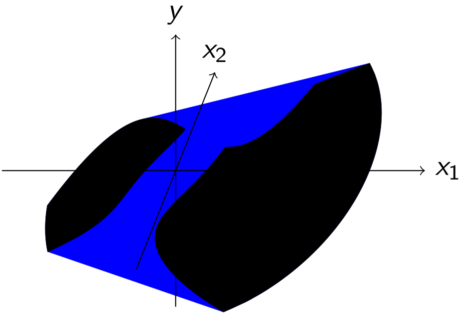


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
{\color{blue}A} & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
{\color{green}C} & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

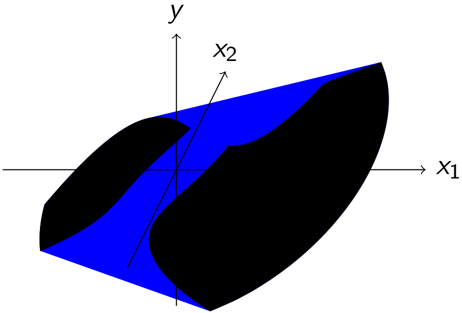


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

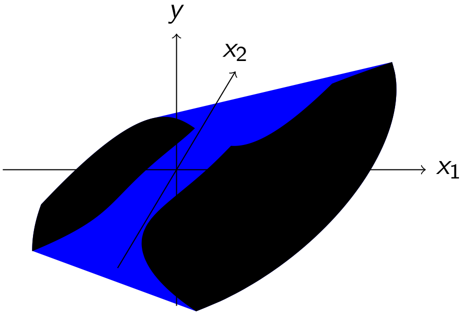


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

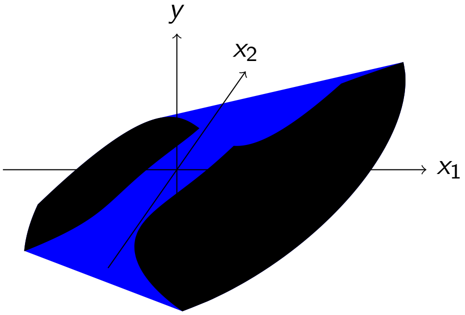


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

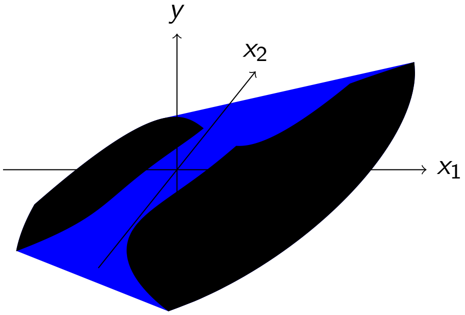


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & - x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq 0
\end{array}
$$

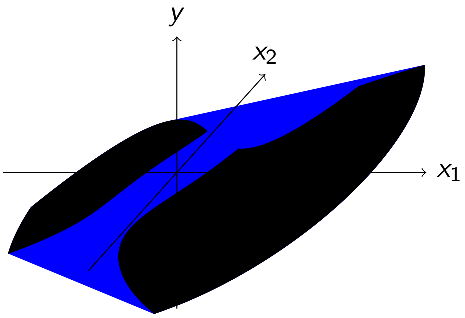


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

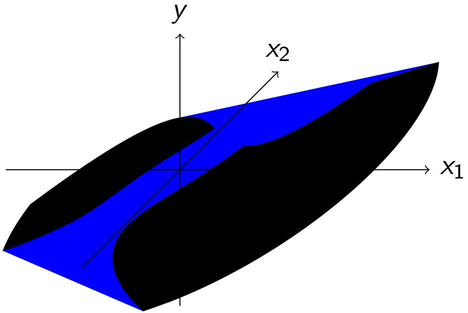
$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & - x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

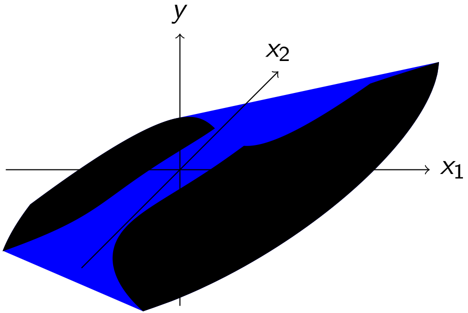
$$\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

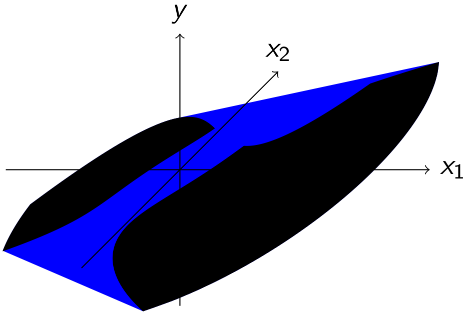
$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & - x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

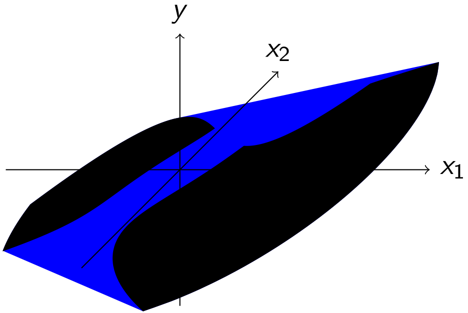
$$
\begin{array}{llr}
A & & -y_1 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

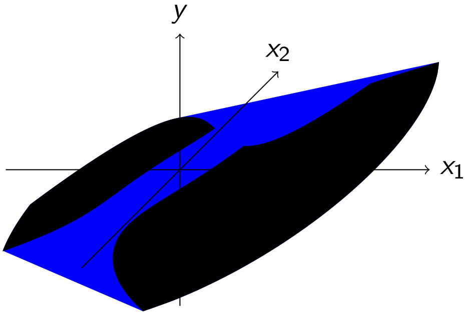
$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -y_1 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

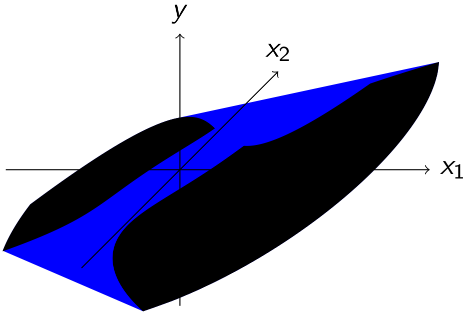
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

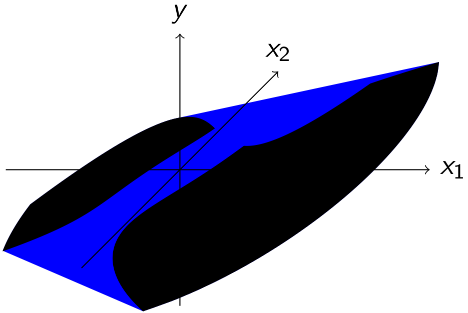
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

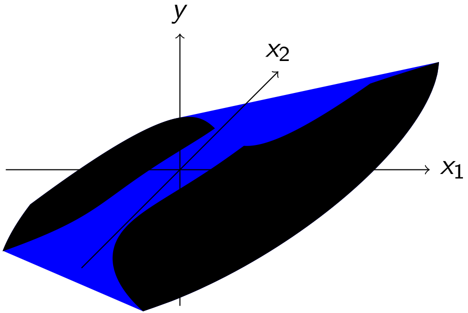
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

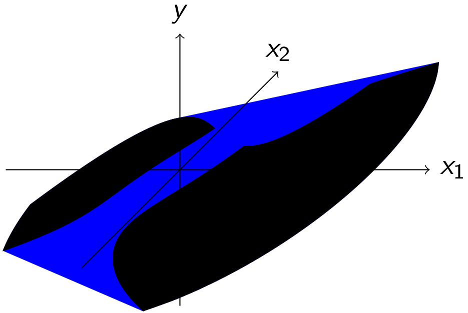
$$
\begin{array}{lrrrrrl}
A & & -\,y_1 & +\,x_1 & +\,2x_2 & -\,1 & \geq 0\\
B & -\,y_2 & +\,2y_3 & -\,2x_1x_2 & +\,x_2^2 & -\,\frac{1}{3} & \geq 0\\
C & & -\,y_3 & -\,x_2^2 & +\,x_1 & +\,4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

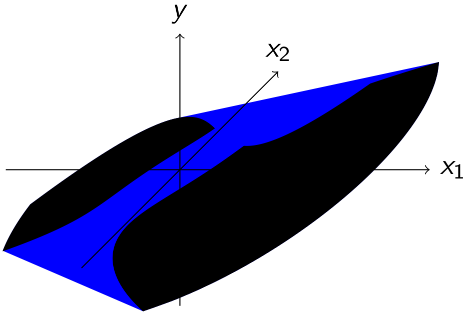
$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -y_1 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0\\
B & -y_2 & +2y_3 & -2y_4 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0\\
C & & -y_3 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

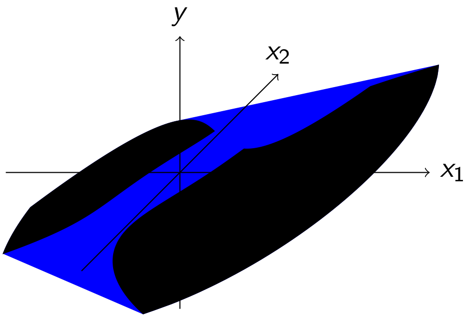
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités linéaires

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redondant:

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{3}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{3}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3 x_2^4 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

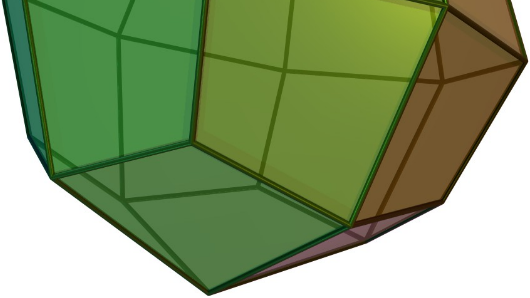
Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

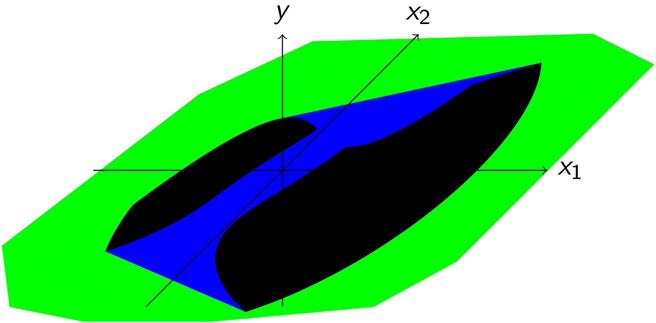
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & y_{18} & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$





conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(a+bx_1+cx_2+dx_1^2+ex_1x_2+fx_2^2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & -\, x_1^3 & +\, x_1 & +\, 2x_2 & -\, 1 & \geq & 0 \\
B & -\, x_2^4 & +\, 2x_1^2 & -\, 2x_1x_2 & +\, x_2^2 & -\, \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\, x_1^2 & -\, x_2^2 & +\, x_1 & +\, 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c, ...):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c,$\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix}
\succeq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4)(a + bx_1 + cx_2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b \\ c\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,$c, \dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, …):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,$c, \dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, ...):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcrcc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, …):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, …):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

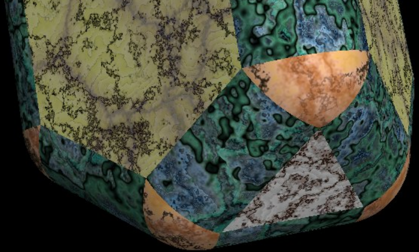
Système d'inégalités polynomiales

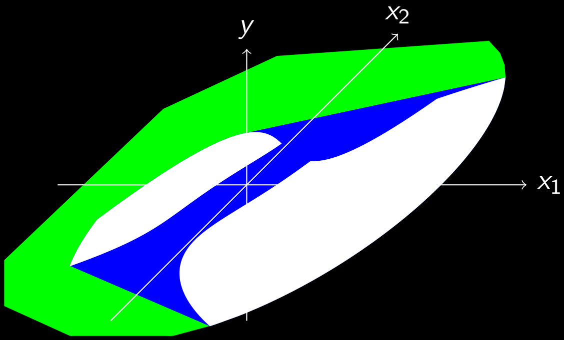
Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondant (parametrisées par a,b,c, $\ldots$):

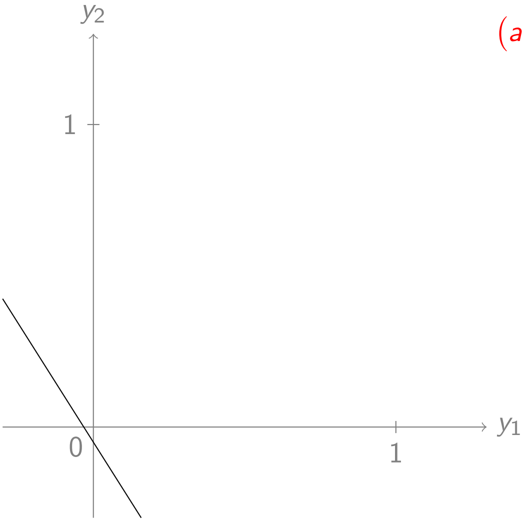
$$\begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad \succeq 0$$





conv S

Inégalité matricielle linéaire

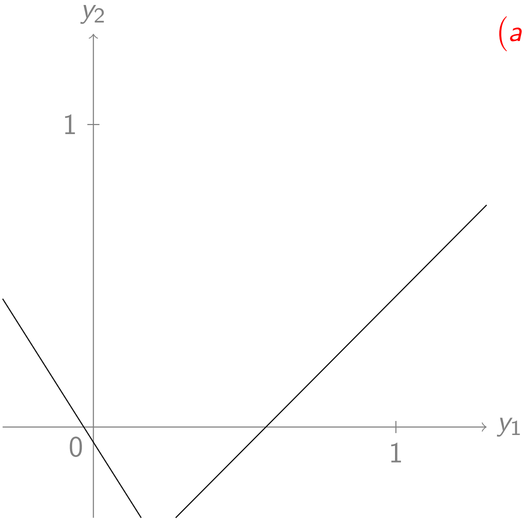


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

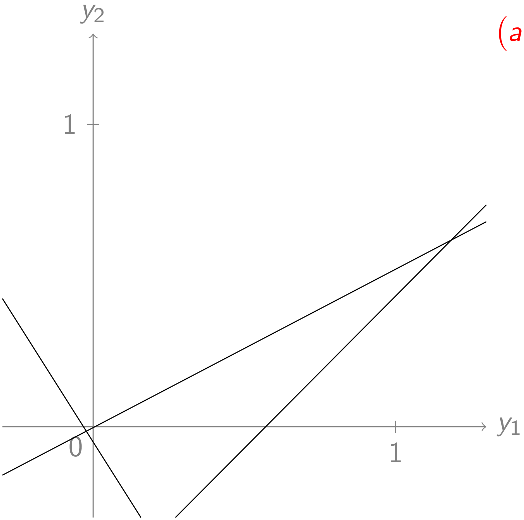


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

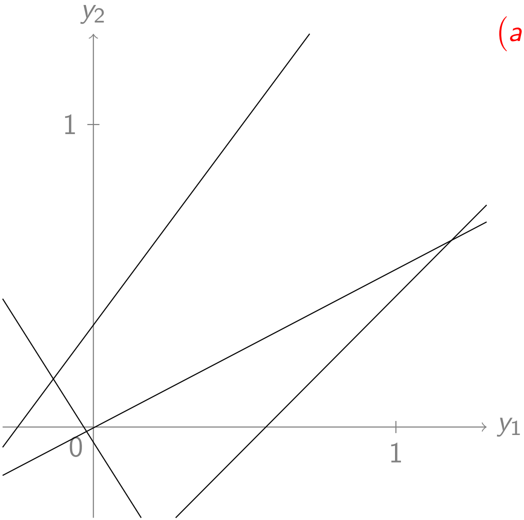


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

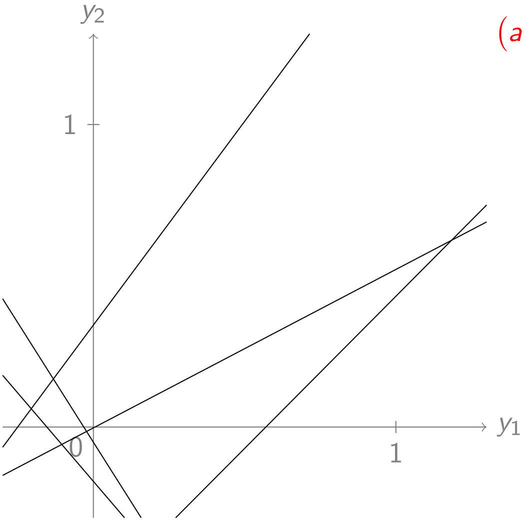


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

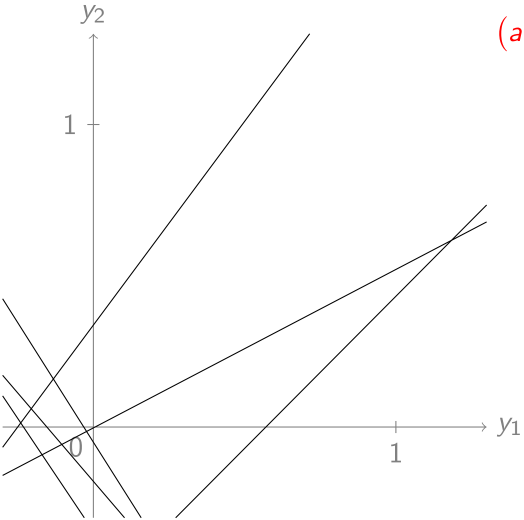


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

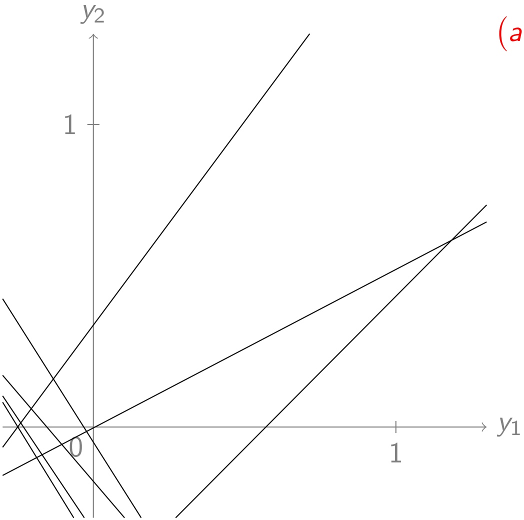
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

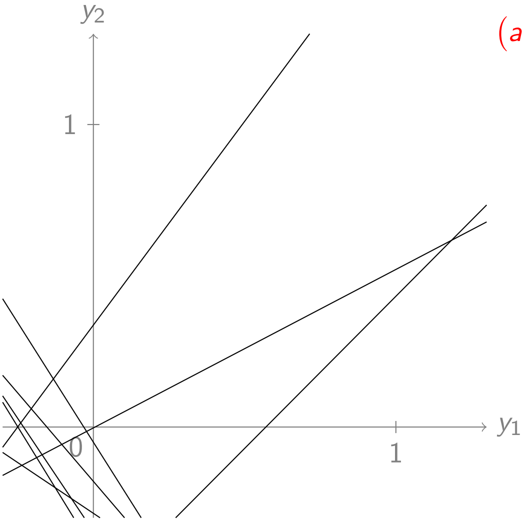


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

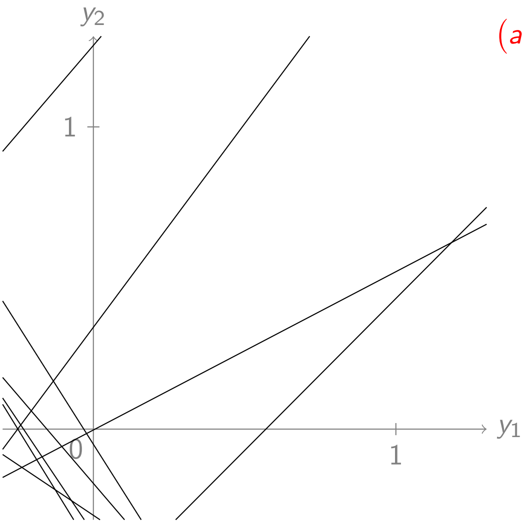


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

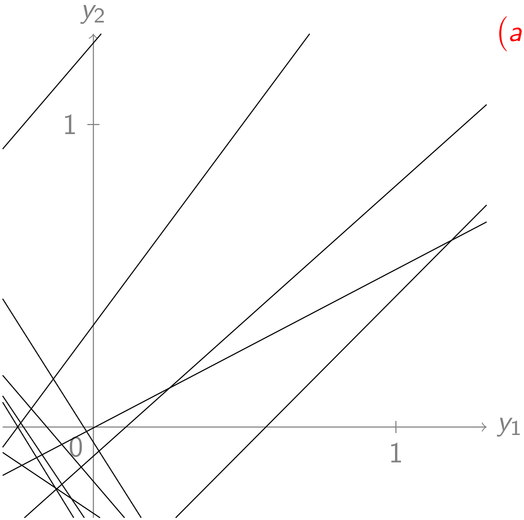


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

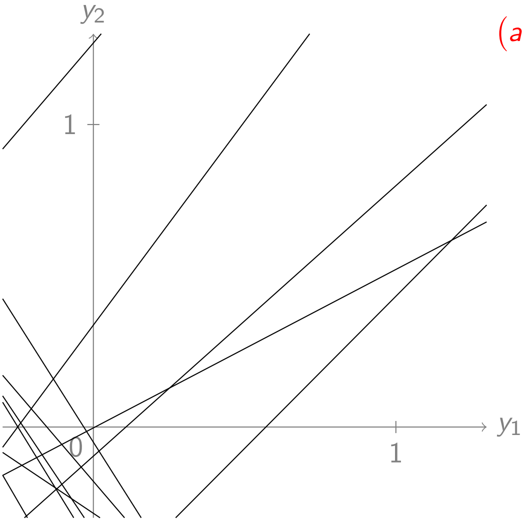


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

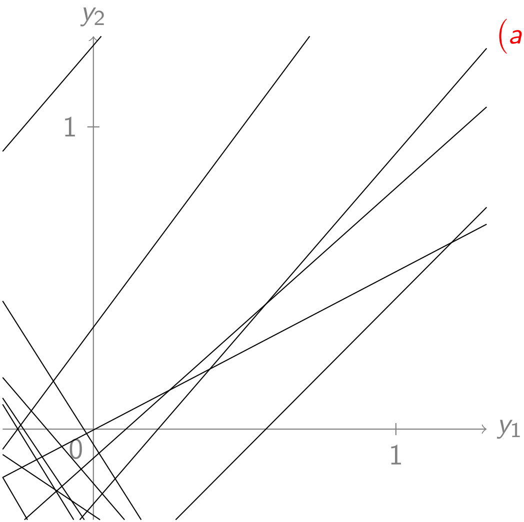


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

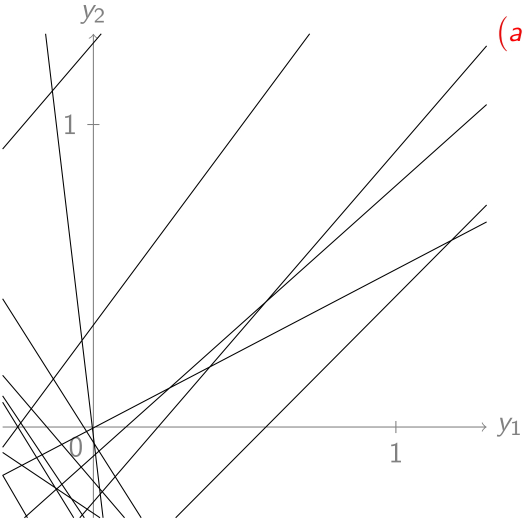


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

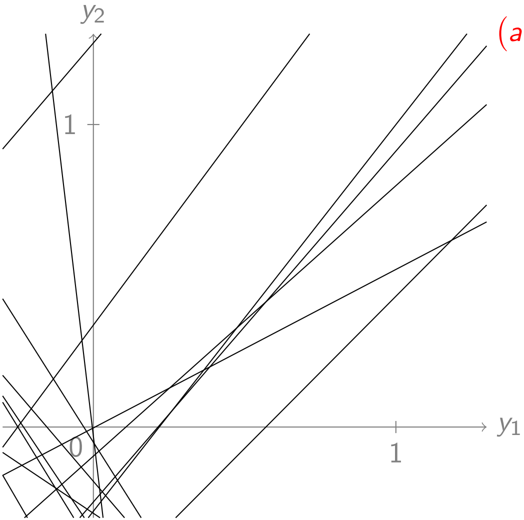


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

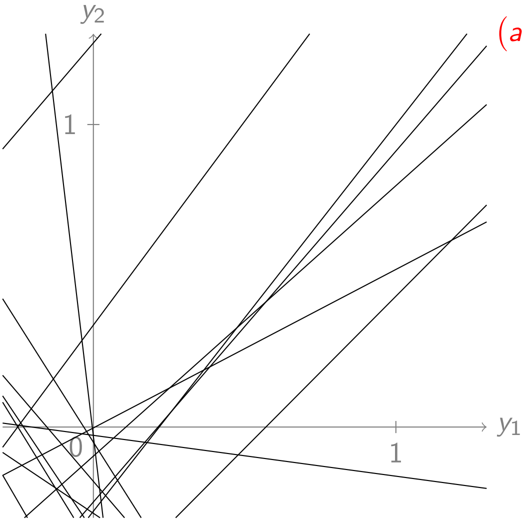
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

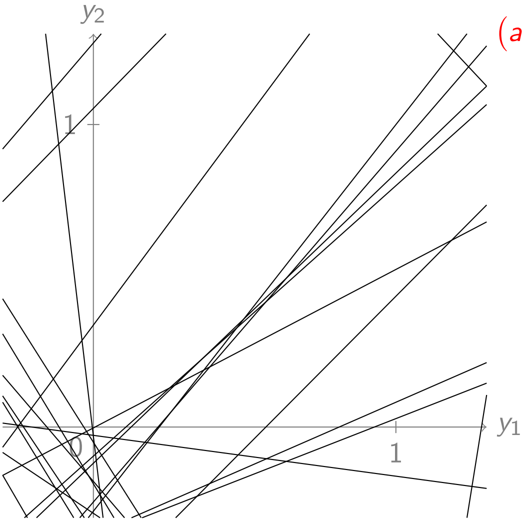


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

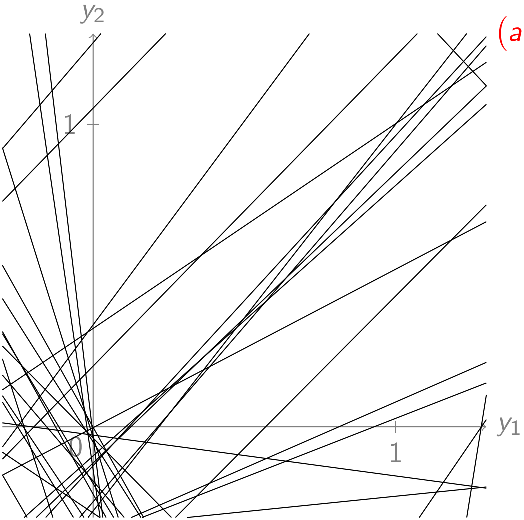


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

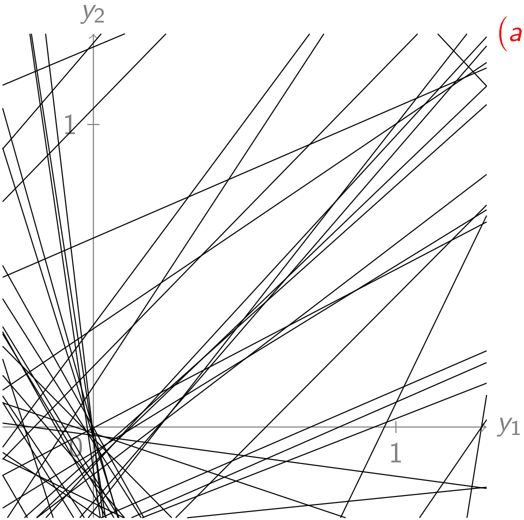


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

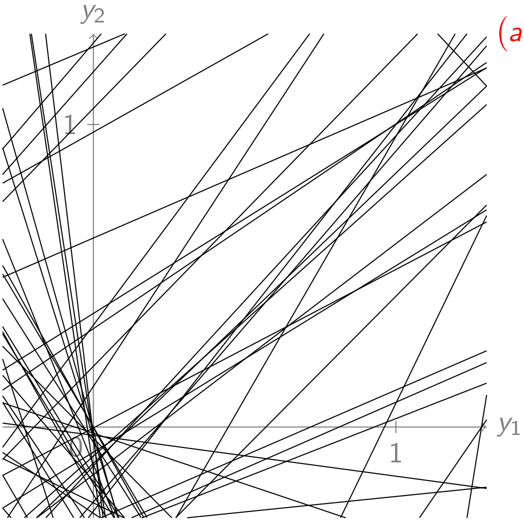
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

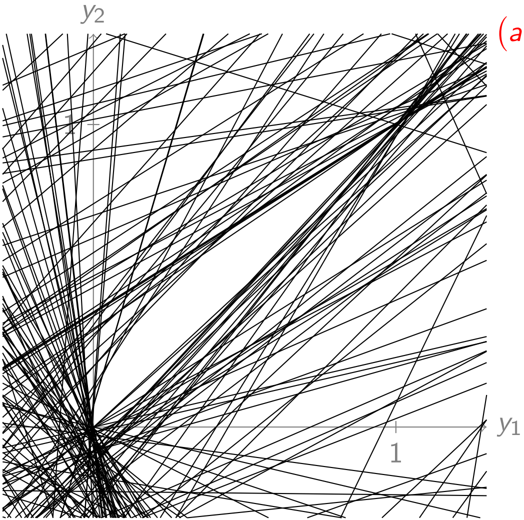
Inégalité matricielle linéaire

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

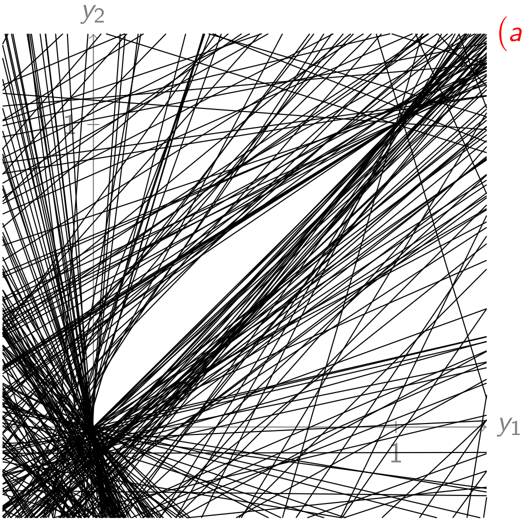


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

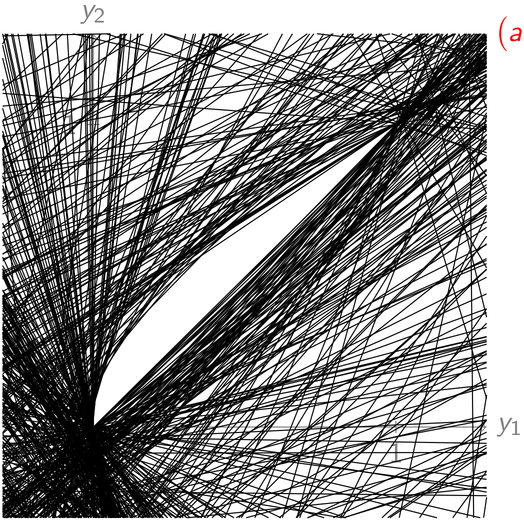


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

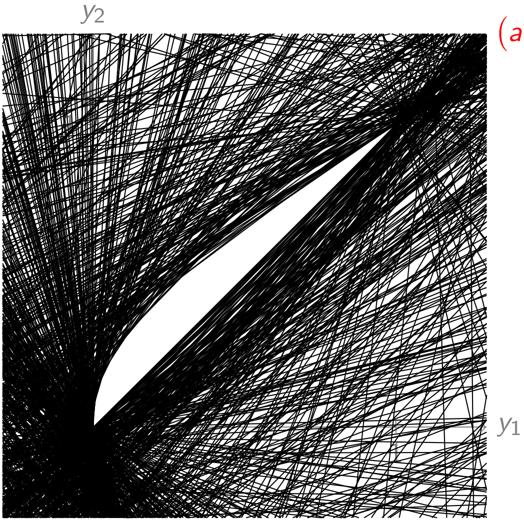


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

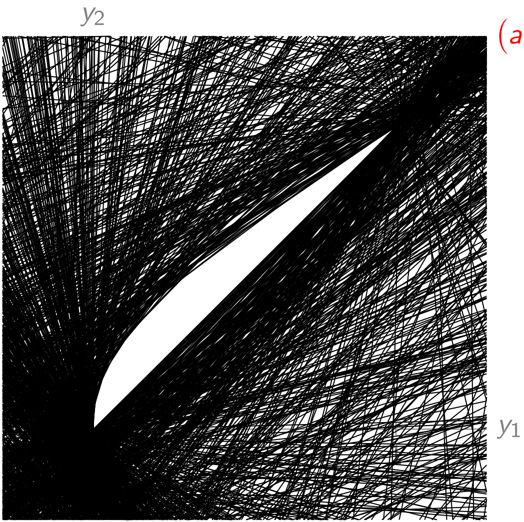


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

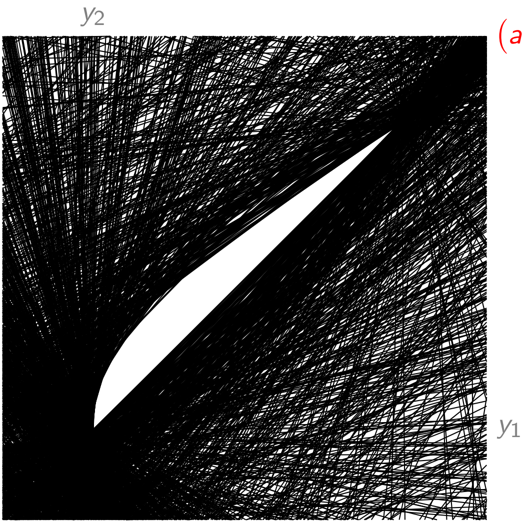


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \qquad\qquad \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"

- $S' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}\}$ projeté
  relaxation de Schmüdgen

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système “linéarisé”
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \dots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système “linéarisé”
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \ldots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.
La question est si $\operatorname{conv} S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- $S_k{}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \ldots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.
La question est si $\operatorname{conv} S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
Si S n'est pas compact, alors on a souvent $\operatorname{conv} S \neq S'$ et donc la bonne réponse est souvent "non".

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système “linéarisé”
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \dots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.
La question est si $\operatorname{conv} S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
Si S n'est pas compact, alors on a souvent $\operatorname{conv} S \neq S'$ et donc la bonne réponse est souvent “non”. Si S est compact, alors nous verrons que $\operatorname{conv} S = S'$ mais Parrilo a donné un exemple pour lequel la bonne réponse est quand même “non”.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

(iii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

(iii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Si S est d'intérieur non-vide, alors chaque T_k est fermé dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

(iii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Si S est d'intérieur non-vide, alors chaque T_k est fermé dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Théorème (Schmüdgen 1991). Soit S compact.

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $(f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Proposition. Fixons $k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ et supposons $S \neq \emptyset$ et que $\operatorname{conv} S$ soit fermé. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\operatorname{conv} S = S'_k$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

(iii) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ on } S \implies f \in \overline{T_k})$

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Si S est d'intérieur non-vide, alors chaque T_k est fermé dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

Théorème (Schmüdgen 1991). Soit S compact.

(a) $\forall L \in \mathcal{L} \colon \exists$ mesure de proba μ sur $S \colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. Si S est compact, alors $\operatorname{conv} S = S'$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T).$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N} \colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \ldots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$,
$a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \ldots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$,
$a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.

Supposons que S soit compact.

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \ldots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$,
$a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \ldots, g_m$)

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \dots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$,
$a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$,

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \dots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \dots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c\left(1 + \left(n\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N} \colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \dots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c\left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

Supposons que S soit compact.

Le théorème de Schmüdgen affirme que
$\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$.
On voudrait que $\exists k \in \mathbb{N}\colon \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T_k)$,
c.-à-d. on souhaiterait des bornes sur les degrés des sommes de carrés dans l'écriture des polynômes linéaires (c.-à-d. de degré ≤ 1) strictement positifs.

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1! \ \dots \ \alpha_n!} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c\left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

Problème: Dépendance de $\frac{\|f\|}{f^*}$.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$.
Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

Ma démonstration revient à trouver une version modérée de ma preuve algébrique et à peu près constructive du théorème de Schmüdgen qui permet de faire un suivi de complexité.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

Ma démonstration revient à trouver une version modérée de ma preuve algébrique et à peu près constructive du théorème de Schmüdgen qui permet de faire un suivi de complexité. La dépendance de $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$ est explicitée.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

Ma démonstration revient à trouver une version modérée de ma preuve algébrique et à peu près constructive du théorème de Schmüdgen qui permet de faire un suivi de complexité. La dépendance de $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$ est explicitée. Le cœur de cette preuve sont des constructions algébriques basées sur la borne obtenue par Powers et Reznick en 2001 pour:

Theorem (Pólya 1928).

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

Ma démonstration revient à trouver une version modérée de ma preuve algébrique et à peu près constructive du théorème de Schmüdgen qui permet de faire un suivi de complexité. La dépendance de $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$ est explicitée. Le cœur de cette preuve sont des constructions algébriques basées sur la borne obtenue par Powers et Reznick en 2001 pour:

Theorem (Pólya 1928). Supposons que $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ soit homogène et $f > 0$ sur $\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

En 2001, Prestel avait déjà démontré l'existence seule d'une telle borne sur les degrés qui ne dépend que de n, m, $g_1, \ldots, g_m$, $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$. Sa démonstration est basée sur une preuve purement algébrique du théorème de Schmüdgen obtenue par Wörmann en 1998. Utilisant la théorie des valuations, il trouve une certaine version du théorème de Schmüdgen qui est valide sur les corps réels clos. Par le théorème de finitude de la logique du premier ordre, il obtient l'existence des bornes sur le degré. En utilisant le théorème de complétude de Gödel, il peut conclure que cette borne est calculable.

Ma démonstration revient à trouver une version modérée de ma preuve algébrique et à peu près constructive du théorème de Schmüdgen qui permet de faire un suivi de complexité. La dépendance de $d = \deg f$ et $\frac{\|f\|}{f^*}$ est explicitée. Le cœur de cette preuve sont des constructions algébriques basées sur la borne obtenue par Powers et Reznick en 2001 pour:

Theorem (Pólya 1928). Supposons que $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ soit homogène et $f > 0$ sur $\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Alors, pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment large, $(X_1 + \cdots + X_n)^N f$ n'a que des coefficients positifs.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ on $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen. En fait, ils démontrent un théorème plus général où l'ensemble S est définie elle-même par une inégalité matricielle linéaire.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen. En fait, ils démontrent un théorème plus général où l'ensemble S est définie elle-même par une inégalité matricielle linéaire. Le cas spécial ci-dessus s'en déduit en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec la famille $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et appliquant ma construction uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen. En fait, ils démontrent un théorème plus général où l'ensemble S est définie elle-même par une inégalité matricielle linéaire. Le cas spécial ci-dessus s'en déduit en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec la famille $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et appliquant ma construction uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$ (utiliser compacité de S^{t-1}; pas besoin d'étendre Pólya aux matrices; Pólya habituel rend des coefficients nonnégatifs paramétrisés $c_{a \in S^{t-1}}$ qui correspondent à des formes quadratiques semidéfinies positives).

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen. En fait, ils démontrent un théorème plus général où l'ensemble S est définie elle-même par une inégalité matricielle linéaire. Le cas spécial ci-dessus s'en déduit en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec la famille $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et appliquant ma construction uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$ (utiliser compacité de S^{t-1}; pas besoin d'étendre Pólya aux matrices; Pólya habituel rend des coefficients nonnégatifs paramétrisés $c_{a \in S^{t-1}}$ qui correspondent à des formes quadratiques semidéfinies positives). De cette manière, on obtient également des bornes sur le degré similaires à celles pour le théorème de Schmüdgen.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Hol et Scherer montrent ce théorème en étendant le théorème de Pólya aux polynômes dont les coefficients sont des matrices symétriques et en imitant mes constructions algébriques pour le théorème de Schmüdgen. En fait, ils démontrent un théorème plus général où l'ensemble S est définie elle-même par une inégalité matricielle linéaire. Le cas spécial ci-dessus s'en déduit en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec la famille $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et appliquant ma construction uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$ (utiliser compacité de S^{t-1}; pas besoin d'étendre Pólya aux matrices; Pólya habituel rend des coefficients nonnégatifs paramétrisés $c_{a \in S^{t-1}}$ qui correspondent à des formes quadratiques semidéfinies positives). De cette manière, on obtient également des bornes sur le degré similaires à celles pour le théorème de Schmüdgen. D'une manière plus compliquée (comme dans Hol et Scherer), Helton et Nie ont récemment démontré ces bornes sur le degré.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0 \text{ on } S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}\colon F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ on $S \implies f \in T$)

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Ce résultat de Hol et Scherer (mais pas celui qui est plus général et dont nous n'avons pas besoin) est une conséquence immédiate du théorème de Schmüdgen:

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ on $S \implies f \in T$)

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Ce résultat de Hol et Scherer (mais pas celui qui est plus général et dont nous n'avons pas besoin) est une conséquence immédiate du théorème de Schmüdgen: Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ on

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y valeur propre de F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ on $S \implies f \in T$)

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Ce résultat de Hol et Scherer (mais pas celui qui est plus général et dont nous n'avons pas besoin) est une conséquence immédiate du théorème de Schmüdgen: Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ on

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y valeur propre de F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.

Supposons que S soit compact.

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}\colon F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Ce résultat de Hol et Scherer (mais pas celui qui est plus général et dont nous n'avons pas besoin) est une conséquence immédiate du théorème de Schmüdgen: Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ on

$$S_F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y valeur propre de F(x)}\}$$
$$= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F. Or nous obtenons une representation de $f = Y$ par le théorème de Schmüdgen. Il suffit de remplacer Y par f et d'utiliser que $P_F(\bar{X}, F) = 0$ d'après Cayley-Hamilton de sorte que p_F disparaît dans cette représentation...

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $(f > 0 \text{ on } S \implies f \in T)$

Théorème (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$:
$F \succ 0$ on $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Ce résultat de Hol et Scherer (mais pas celui qui est plus général et dont nous n'avons pas besoin) est une conséquence immédiate du théorème de Schmüdgen: Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ on

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y valeur propre de F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F. Or nous obtenons une representation de $f = Y$ par le théorème de Schmüdgen. Il suffit de remplacer Y par f et d'utiliser que $P_F(\bar{X}, F) = 0$ d'après Cayley-Hamilton de sorte que p_F disparaît dans cette représentation... Problème: De cette façon, on n'obtient pas les bornes exigées sur le degré.

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Définition. Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strictement concave sur } U \ :\Longleftrightarrow\ D^2 p \prec 0 \text{ on } U \iff$$
$$\forall x \in U\colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon D^2 p(x)[v,v] < 0$$

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Définition. Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strictement concave sur } U \;:\Longleftrightarrow\; D^2 p \prec 0 \text{ on } U \iff \forall x \in U \colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon D^2 p(x)[v,v] < 0$$

$$p \text{ strictement quasi-concave sur } U \;:\Longleftrightarrow$$
$$\forall x \in U \colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon (Dp(x)[v] = 0 \implies D^2 p(x)[v,v] < 0)$$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u] \, ds \, dt$$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(-\sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u]\, ds\, dt$$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u))[x-u, x-u] \, ds \, dt$$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \Big(\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u)) ds\, dt \Big)[x-u, x-u]$$

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S_k'$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S_k'$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \Big(\underbrace{\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u))\, ds\, dt}_{=: F_{i,u}(x)} \Big) [x-u, x-u]$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ on S, utiliser Hol & Scherer avec les bornes sur le degré!

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T F_{i,u} \, (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ on S, utiliser Hol & Scherer avec les bornes sur le degré!

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T \Bigg(\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} P_{i,u,\delta} P_{i,u,\delta}^T g^\delta \Bigg) (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ on S, utiliser Hol & Scherer avec les bornes sur le degré!

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Lemme (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} (P_{i,u,\delta}^T (\bar{X} - u))^T (P_{i,u,\delta}^T (\bar{X} - u)) g^\delta$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ on S, utiliser Hol & Scherer avec les bornes sur le degré!

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Idée de la démonstration. Réduction assez brute à la démonstration du lemme. Expliquer au tableau noir.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Idée de la démonstration. Réduction assez brute à la démonstration du lemme. Expliquer au tableau noir.

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur $\partial S \cap \{g_i = 0\}$, que g_i s'annule nulle part dans l'interieur de S et la dérivée de g_i s'annule nulle part sur $\partial S \cap \{g_i = 0\}$. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Quand y a-t-il une relaxation de Lasserre qui est exacte?

Quand y a-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{conv} S = S'_k$?

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur S. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Idée de la démonstration. Réduction assez brute à la démonstration du lemme. Expliquer au tableau noir.

Théorème (Helton & Nie 2008). Soit S compact, convexe et de l'intérieur non-vide. Supposons de plus que chaque g_i soit strictement quasi-concave sur $\partial S \cap \{g_i = 0\}$, que g_i s'annule nulle part dans l'interieur de S et la dérivée de g_i s'annule nulle part sur $\partial S \cap \{g_i = 0\}$. Alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Idée de la démonstration. Initialement extrêmement dur. Approche beaucoup plus simple semble possible. Expliquer au tableau noir.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Remarque. Tout S'_k est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Remarque. Tout S_k' est un projeté IML.

Remarque. Tout projeté IML est (bien sûr) convexe et (par l'élimination de quantificateurs) semialgébrique.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Démonstration. Utiliser le lemme et le premier théorème de Helton & Nie.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Démonstration. Utiliser le lemme et le premier théorème de Helton & Nie.

Au Congrés International des Mathématiciens à Madrid en 2006, Arkadii Nemirovskii a demandé si tout convexe semialgébrique est un projeté IML: “Cette question semble être entièrement ouverte.”

Literature

Helton & Nie: Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets

http://arxiv.org/abs/0709.4017

Helton & Nie: Semidefinite representation of convex sets

http://arxiv.org/abs/0705.4068

Lasserre: Convex sets with semidefinite representation
à paraître dans Math. Prog.

http://dx.doi.org/10.1007/s10107-008-0222-0

Literature

avec Nie: On the complexity of Putinar's Positivstellensatz
J. Complexity 23, no. 1 (2007), 135—150
http://dx.doi.org/10.1007/10.1016/j.jco.2006.07.002

Hol & Scherer: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs,
Math. Prog. 107, no. 1-2 (2006), 189–211
http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0684-2

An algorithmic approach to Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Pure Appl. Algebra 166 (2002), 307—319
http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00041-X

On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Complexity 20, no. 4 (2004), 529–543
http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2004.01.005

Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets
SIAM J. Opt. 15, no. 3 (2005), 805–825
http://dx.doi.org/10.1137/s1052623403431779